# لگاریتم

گئورگی کلیمنتوویچ استاپو

ترجمهٔ

پرویز شهریاری

# لگاریتم

گئورگی کلیمنتویچ استاپو

ترجمهٔ پرویز شهریاری

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

گ. ک. استاپو

*Остапов Георгий Климентьевич*

**لگاریتم**

**ЛОГАРИФМЫ.**

ترجمهٔ پرویز شهریاری

**چاپ اول**

پایان چاپ : **اسفند ماه ۱۳۴۸ ــ تهران**

چاپ : چاپخانهٔ خواجه ، تعداد **۳۳۰۰** نسخه

صحافی : چاپخانهٔ بیست وپنجم شهریور (افست)



**شمارهٔ ثبت کتابخانهٔ ملی ۹۹۵ به تاریخ ۴۸/۱۱/۱۶**

## مطالب کتاب

مقدمهٔ مترجم درصفحهٔ ۷

مقدمهٔ مؤلف درصفحهٔ ۹

**فصل اول**

**تاریخ لگاریتم و توابع نمائی از صفحهٔ ۱۳ تا صفحهٔ ۶۸**

۱. اهمیت تاریخی کشف لگاریتم درصفحهٔ ۱۵

۲. شیوهٔ محاسبه ، قبل از بوجود آمدن لگاریتم درصفحهٔ ۱۹

۳. افکار اولیه دربارهٔ لگاریتم درصفحهٔ ۲۲

۴. مرحلهٔ اول تاریخ تکامل لگاریتم درصفحهٔ ۲۷

تعریف لگاریتم از نظر نپر ۳۰

خواص اساسی لگاریتم و نامساویها برای تفاضل لگاریتمهای
دو عدد از نظر نپر ۳۷

روش محاسبهٔ لگاریتمها که به وسیلهٔ نپر بکار می‌رفت ۴۱

بورگی ۴۲

بریگس ۴۵

۵. مرحلهٔ دوم تاریخ تکامل لگاریتم و توابع نمائی درصفحهٔ ۵۶

سنت وینسنت ۵۷

مرکاتور ۵۷

نیوتون ۵۸

تیلور ۶۰
اولر ۶۰
۶. تاریخچه‌ای از خط‌کش لگاریتمی درصفحهٔ ۶۷


## فصل دوم


**تاریخ اثبات گنگ بودن ومتعالی بودن عددهای e و π ازصفحهٔ ۶۹ تاصفحهٔ ۱۱۶**

۱. گنگ بودن عددهای e و π درصفحهٔ ۷۱
۲. اثبات وجود عددهای متعالی به‌کمك کسرهای مسلسل درصفحهٔ ۸۳
۳. اثبات وجود عددهای متعالی به‌کمك آنالیز درصفحهٔ ۸۹
۴. اثبات وجود عددهای متعالی به‌کمك نظریهٔ مجموعه‌ها درصفحهٔ ۱۰۶
۵. تکامل بعدی نظریهٔ عددهای متعالی درصفحهٔ ۱۱۳


## فصل سوم


**نظریهٔ توابع نمائی ولگاریتمی در جبر از صفحهٔ ۱۱۷ تا صفحهٔ ۱۶۴**

۱. تعمیم مفهوم توان درصفحهٔ ۱۱۹
توان با نمای گنگ ۱۳۴
۲. تابع نمائی درصفحهٔ ۱۳۸
۳. تابع لگاریتمی درصفحهٔ ۱۵۶


## فصل چهارم


**نظریهٔ تابع لگاریتمی و تابع نمائی درآنالیزریاضی ازصفحهٔ ۱۶۵ تا ۱۸۴**

۱. طرح نظریه درحوزهٔ اعداد حقیقی درصفحهٔ ۱۶۷
تابع لگاریتمی ۱۶۹

تابع نمائی ۱۷۴

۲. طرح نظریه درهیئت اعداد مختلط درصفحهٔ ۱۷۸

تابع لگاریتمی ۱۷۸

تابع نمائی ۱۸۲


## فصل پنجم


**روشهای محاسبهٔ لگاریتمها از صفحهٔ ۱۸۵ تا صفحهٔ ۲۳۹**

۱. روش محاسبهٔ لگاریتمها به‌کمك رشته درصفحهٔ ۱۸۷

۲. روشهای مقدماتی برای محاسبهٔ لگاریتمها درصفحهٔ ۱۹۶

روش نپر ۲۰۱

روش اول بریگس ۲۰۶

روش دوم بریگس ۲۱۷

روش ساروس ۲۲۰

روش کسرهای مسلسل ۲۲۵

روش نامساویها ۲۲۸

روش رسم منحنی ۲۳۶


## فصل ششم


**آموزش توابع نمائی ولگاریتمی در دبیرستانها از صفحهٔ ۲۴۱ تاصفحهٔ ۲۸۴**

۱. روش طرح نظریهٔ لگاریتم درکتابهای درسی دبیرستانی درصفحهٔ ۲۴۳

۲. راهنمای تعلیم تابع نمائی ولگاریتم در دبیرستانها درصفحهٔ ۲۴۹

دانش‌آموزان ما در دورهٔ دبیرستان و بعد در رشته‌های مختلف دانشگاه و یا مدارس عالی بامباحث مختلف ریاضی کار می‌کنند ، روابط و قضایای مختلف را در حل مسائل و برای آماده شدن درامتحان بکار می‌برند، ولی کمتر می‌توانند دربارهٔ ماهیت منطقی این احکام جامد ونحوهٔ ارتباط آنها با عمل ویا سیرمنطقی حوادثی که منجر به کشف آنها شده است، فکر کنند.

دلیل اصلی این وضع را باید دراین حقیقت جستجو کرد که آموزش ریاضی دردبیرستانهای ما، ازعمل و تاریخ جداست و به‌همین مناسبت نمی‌تواند کششی در دانش آموزان ما بوجود آورد وآنها را به‌درك عمیق مفاهیم ریاضی وادارد .

باید اذعان کرد که اغلب معلمین ریاضی هم نمی‌توانند ازحدود همین روابط وقضایا فراتر روند وبه‌همین علت وقتی که صحبت از کار اضافی در کلاس می‌شود ، تنها به فکر مسائل مشکل‌تر و یا معمائی می‌افتندو فقط $x$ را به $y$ ویا $z$ را به $t^2$ تبدیل می‌کنند .

این درست است که زبان فارسی ازلحاظ وجود کتابهای علمی فقیر است ، ولی به اعتقاد من علت اصلی این فقر ، عدم اعتنای معلمین، دانشجویان ودانش‌آموزان ما به‌کتابهای علمی است. ازکتابهای علمی تنها موفقیت نصیب نمونه‌هائی می‌شود که می‌تواند راهنمائی برای موفقیت در امتحان باشد .

*

کتاب «لگاریتم» ، که اینك دردست شماست، گوشه‌ای از روش تعلیم ریاضی را برای معلم و دانش‌آموز روشن می‌کند .

دراین کتاب سیر منطقی مسائلی که منجر به کشف لگاریتم شده است ، واینکه این کشف نه تصادفی است و نه متعلق به یك فرد و یا حتی یك کشور ، روشن شده است . دقیقاً توضیح داده شده است که چگونه باید با این مبحث ریاضی آشنا شد و چگونه آن را آموخت ؟ البته ، با توجه به اینکه نویسندهٔ کتاب باتاریخ ریاضیات در شرق آشنا نبوده است از دانشمندان مشرق زمین و مثلاً **ملامحمد باقر یزدی** و یا **محمدعلی اصفهانی** ، که بدون اطلاع ازکار دیگران ، به کشف لگاریتم موفق شده بودند، نامی نمی‌برد ، ولی این نقص بهیچ‌وجه از اهمیت کتاب نمی‌کاهد و می‌تواند راهنمای بسیار خوبی برای آموزش ریاضی باشد.

درترجمهٔ کتاب ، تنها مواردی راکه روی کتابهای درسی کشور مؤلف بحث شده است ، حذف کرده‌ایم و یا بدون اینکه ازکتاب موردبحث نامی برده‌شود، خودبحث را دنبال کرده‌ایم. شاید بهتر می‌بود که فصلی به کتاب اضافه شود وکتابهای درسی کشورما دراین زمینه مورد مطالعه قرار گیرد ، ولی با توجه به مجموعهٔ مطالبی که درفصلهای مختلف این کتاب وجود دارد ، بخودی خود این هدف تأمین می‌شود و نیازی به اضافه کردن چند صفحه به‌آن نیست .

آرزوی من این است که این کتاب از نمونه‌هائی باشدکه بتواندآموزش ریاضی را در دبیرستانهای ما به مسیر اصلی خود برگرداند .

**مترجم**

## از مؤلف

دراین کتاب ازتاریخ لگاریتم و تابع نمائی ، گنگ بودن و متعالی بودن عددهای e و π، نظریه توابع نمائی ولگاریتمی در جبر و آنالیز ریاضی و روشهای محاسبهٔ لگاریتمها گفتگو شده است. همچنین از روشهای طرح نظریهٔ لگاریتم درکتابهای درسی و سپس راهنمائی برای تعلیم تابع نمائی و لگاریتمها در دبیرستانها ، صحبت شده است .

باید متذکر شد که طرح کامل این مطالب جائی وجود ندارد و تنها مطالب پراکنده و ناقصی اینجا وآنجا آمده است. اکثر مؤلفین تاریخ لگاریتم را در قرن هفدهم تمام‌کرده‌اند ، علت این امرآن است‌که ازاین به‌بعد ، تاریخ لگاریتم با تاریخ آنالیزمخلوط شده است وبنابراین بسختی می‌توان دنبالهٔ آن را ادامه داد . با وجود این اشکال ، ما تاریخ لگاریتم را تا قرن نوزدهم تعقیب کرده‌ایم .

درکتاب بطور منطقی و دقیق ، نظریـهٔ توابع نمائی و لگاریتمی ، برمبنای نظریهٔ حدود و نظریهٔ اعداد گنگ (که ما آنها را به عنوان کسر اعشاری غیر متناوب نامحدود درنظر گرفته‌ایم) ، طرح شده است. چنین تعریفی برای اعداد گنگ، به‌این مناسبت انتخاب شده است‌که برای معلمین ودانش‌آموزان دبیرستانها قابل درک باشد .

در کتاب شرح یکی از روشهای امروزی طرح نظریه ، در آنالیز ریاضی‌آمده است : وقتی‌که لگاریتم به‌کمک انتگرال تعریف می‌شود و تابع نمائی به عنوان عکس تابع لگاریتمی در

نظر گرفته می‌شود . این روش را به این مناسبت آورده‌ایم که کمتر ازآن اطلاع دارند ، اگرچه به‌اندازهٔ کافی ساده وجالب است .

توجه زیادی به مطالعهٔ روشهای مقدماتی محاسبهٔ تقریبی لگاریتمها کرده‌ایم ، زیرا بسیاری از معلـمین دبیرستانها دانش‌آموزان را با این روشهاآشنا نمی‌کنند، این روشها برای دانش آموزان کاملا قابل فهم است ، در حالی که آنها گمان می‌کنند که برای محاسبهٔ لگاریتمها باید به ریاضیات عالـی متوسل شد ، که البته صحیح نیست .

ضمن شرح روشهای مقدماتی محاسبهٔ لگاریتمها ، این مطلب را هم روشن کرده‌ایم که تا چه‌اندازه و به چه ترتیبی باید ازاین قسمت ، برای درس درکلاس ، استفاده شود .

آموزش نظریهٔ توابع نمائی و لگاریتمی در دبیرستانها، از نظریه نوع تقسیم بندی و طرح آن ، یکی از مشکلات جبر مقدماتی است . اغلب معلمین ، ضمن طرح این نظریه ، به یك رشته احکام جامد می‌پردازند و بدون اینکه دلایل منطقی طرح این احکام را یادآوری کنند ، از دانش‌آموزان می‌خواهند که آنها را فراگیرند. اغلب معلمین به‌اهمیت‌آموزش لگاریتم‌واقف نیستند و گمان می‌کنند کـه لگاریتم تنها برای ساده کردن محاسبات عددی لازم است . آنها نقش توابع لگاریتمی را در فیزیك، شیمی و سایر علوم فراموش می‌کنند و دربارهٔ نقش آن در ریاضیات امروزی هم سخنی بمیان نمی‌آورند .

برای نوشتن این کتاب از تجربیات بهترین معلمین و تجربیاتی که ضمن تدریس و با طرح سؤالات مختلف در جریان سالهای‌متوالی، برای‌مؤلف بوجودآمده است، استفاده شده‌است.


Aritmetische vnd Geometrische Progress
Tabulen/sambt gründlichem vnterricht/wie solche nutzlich
in allerley Rechnungen zugebrauchen/vnd verstanden werden sol.

Die gantze Rote Zahl
230270022.
Die gantze Schwartze Zahl
1000000000.

Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag/ bey Paul
Sessen/der Löblichen Universitet Buchdruckern/ Im Jahr/1620.

صفحهٔ اول جدول بورگی

# فصل اول

## تاریخ لگاریتم و توابع نمائی

# ۱

# اهمیت تاریخی کشف لگاریتم

فکر لگاریتم در ابتدای قرن هفدهم و بطور همزمان به‌وسیلهٔ دو ریاضی‌دان ، یعنی نپر و بورگی بوجود آمد . کشف لگاریتم به‌خاطر احتیاجات زمانه بود که همراه با اکتشافات بزرگ جغرافیایی وگشودن سرزمینهای جدید بااستفادهٔ کامل از غنای طبیعی آنهابود. نجوم وعلوم ریاضی بسرعت پیش می‌رفت. البته درقرن پانزدهم رگیومونتان ریاضی‌دان آلمانی (۱۴۳۶-۱۴۷۶) جدول مقادیر مثلثاتی را با هفت رقم تنظیم کرد ، در قرن شانزدهم جدولهای مقادیر مثلثاتی ده رقمی و ده ثانیه به ده ثانیه، به‌وسیلهٔ ره‌تی‌کوس ریاضی‌دان دیگر آلمانی تنظیم شد. ولی در بسیاری موارد استفادهٔ ازاین جدولها مشکل و دربعضی‌موارد غیرممکن بود ، زیرا منجر به‌انجام عملیات بسیار مفصل روی عددهای بارقمهای

زیاد می‌شد.

پیشرفت مثلثات در زمینهٔ محاسبه ، وسیلهٔ عملی در اختیار نجوم گذاشت که آن‌را «روش ساده کردن محاسبه» می‌توان‌نامید. در این‌روش، عمل ضرب ، که انجام آن مستلزم وقت زیادی است ، به‌جمع یا تفریق تبدیل می‌شود. باهمهٔ اینها ، این روش بغرنج بود و با تکامل‌نجوم لازم بود وسائل نتیجه‌بخش‌تری پیدا شود که انجام عملیات باعددهای‌بزرگ را ممکن سازد.

به‌این‌ترتیب.شیوهٔ کار محاسبه ازمحتوی احتیاجات نجوم وسایر علوم عقب مانده بود. کشف لگاریتم این تضاد را ازبین برد: عملیات مراحل بالاتر (ضرب و تقسیم) را منجربه‌عملیات مراحل پائین‌تر (جمع و تفریق) کرد . لگاریتم این امکان را بوجود آورد که در چند ساعت عملیاتی را به‌نتیجه‌برسانیم ، که قبلا برای انجام آنها یك ماه تمام وقت لازم بود.

به‌قول لاپلاس لگاریتم زندگی منجمین را طولانی‌تر کرد ، و با استفادهٔ از آن‌بود که یوهان‌کپلر دانشمند آلمانی(۱۵۷۱–۱۶۳۰) توانست جدولهای نجومی خود را تشکیل دهد.

کپلر برای تحقیق ریاضی فرضیهٔ خود لازم بود اطلاعات جامعی دربارهٔ هندسهٔ فضایی داشته‌باشد ، بامقاطع مخروطی‌آشنا باشد، قدرت استفاده از مقادیر بی‌نهایت کوچك را داشته باشد و شیوهٔ سریع محاسبه را دراختیار داشته باشد. کپلر با اثر خودش «هزار لگاریتم» (۱۶۲۴) ، به پیشرفت روشهای محاسبه کمك کرد . او از

لگاریتم بـرای تنظیم اثر دیگـرش «جدولهـای رودولفی» (۱۶۲۷)، استفاده کرد که براساس مشاهدات تیخو براهه منجم مشهور دانمارکی (۱۵۴۶–۱۶۰۱) قرار داشت.

متذکر می‌شویم که در ابتـدای قرن هفدهم، وقتی کـه لگاریتم بوجود آمد، کسرهای اعشاری (اگرچه کشف شده بود) هنـوز بطور عمومی معمول نشده بود*. در آن‌زمان مفهوم توابع مثلثاتی وجودنداشت و فقط خطوط مثلثاتی در دایره مورد مطالعه قرارمی‌گرفت (برای اولین بار اولر ریاضی‌دان بزرگ به‌جای خط مثلثاتی، نسبت آن‌را به شعاع در نظر گرفت).

دراین موقع مفهوم توان وطبعاً علامت توان‌هم وجود نداشت. بنابراین ممکن نبود که صحبت مبنای لگاریتم پیش‌آیـد. باوجود این لگاریتم کشف و محاسبه شد.

حالا بسختی می‌شود تصور کرد که اینهمه محاسبات عظیمی که در نجوم وسایرعلوم درمقابل دانشمندان وجودداشت، بدون کمك لگاریتم می‌توانست انجام شود.

اهمیت کشف لگاریتم برای عمل محاسبه آنقدر زیاد است کـه می‌توان آن‌را درردیف کشف دستگاه عددشماری به‌مبنای ده دانست.

ازجهت نظری هم کشف لگاریتم، به‌عنوان ارتباط تابعی‌جدیدی

---

*) عددهای اعشاری را برای نخستین بار **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** در کتاب «مفتاح‌الحساب» خود بکار برد (اوایل قرن پانزدهم میلادی). «مترجم»

بین متغیرها، اهمیت فوق‌العاده‌ای برای تکامل آنالیز بی‌نهایت کوچکها داشت.

در اینجا ما ابتدا به‌مطالعهٔ بعضی شیوه‌های مشابه محاسبه تاقبل‌از بوجودآمدن لگاریتم وهم پدیدآمدن افکار اولیهٔ لگاریتم می‌پردازیم و سپس تاریخ لگاریتم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

# ۲

# شیوهٔ محاسبه قبل از بوجود آمدن لگاریتم

قبل از بوجود آمدن لگاریتم، برای محاسبات مثلثاتی کوشش می‌شد از عمل ضرب فرار کنند و آن را به جمع یا تفریق تبدیل نمایند. اساس کار آنها بر روابط زیر قرار داشت:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

از این روابط برای محاسبه استفاده می‌کردند و طریقه‌ای راکه بر اساس این روابط بدست می‌آوردند، روش ساده کردن محاسبه می‌نامیدند.

همانطور که می‌بینیم ، اساس روش ساده‌کردن محاسبه برتبدیل ضرب به‌جمع یا تفریق قرار دارد . همین فکر بعدها اساس محاسبات لگاریتمی قرار گرفت .

در ابتدا ، روش ساده‌کردن محاسبه تنها در مورد حاصلضرب سینوسها یاکسینوسها بکارمی‌رفت، ولی بتدریج این‌روش مورداستعمال وسیع‌تری پیدا کرد. مثلا تیخو براهه درکارهای مثلثاتی خود ، اغلب برای حل مثلث قواعدی در تبدیل به‌جمع پیدا می‌کرد . به‌عنوان نمونه در مورد محاسبهٔ ضلع $a$ از مثلث کروی ، وقتی که دو ضلع $b$ و $c$ و زاویهٔ $A$ از آن معلوم باشد، از رابطه‌ای به‌صورت زیر استفاده می‌کرد:

$$\cos a = \frac{۱}{۲}\Big\{ \cos(b+c) + \cos(b-c) + [\cos(b-c) - \\ - \cos(b+c)]\cos A \Big\}$$

باید متذکر شد که بعضی از منجمین، حتی بعداز کشف لگاریتم و وجود جدولهای لگاریتمی ، از روش ساده‌کردن محاسبه استفاده می‌کردند.

روش‌ساده‌کردن محاسبه خیلی‌بغرنج‌ترازروش‌محاسبهٔ لگاریتمی است ، زیرا از این روش نمی‌توان مستقیماً برای عمل تقسیم ، توان رساندن و ریشه‌گرفتن استفاده کرد.

اگر توابع مثلثاتی‌را به‌عنوان توابع نمائی، بانماهای موهومی، در نظر بگیریم؛ می‌توان ارتباط مستقیم روش ساده‌کردن محاسبه را با

روش محاسبهٔ لگاریتمی پیدا کرد.

قبل از بوجود آمدن لگاریتم، برای تغییر ضرب به تفاضل از رابطهٔ زیر استفاده می‌کردند:

$$a \cdot b = \frac{۱}{۴}[(a+b)^{۲} - (a-b)^{۲}],$$

که ضمناً لازم بود جدول مربعات اعداد هم در دسترس باشد.

ماگینی منجم ایتالیائی درسال ۱۵۹۲ جدول مربعات اعداد صحیح را تا ۱۰۰ ۰۰۰ تنظیم کرد.

نپر درسال ۱۶۱۷ دریکی از آثار خود به‌نام «رابدولوگیا» روش عملی ضرب و تقسیم را به‌کمك چوبحساب مخصوصی بیان کرد*. بعدها نپر این اثر خود را در جدولهای لگاریتمی خودش منتشر کرد.

همهٔ این روشها فقط تا حدی توانستند به‌هدفهای خود برسند و هر کدام از جهتی ناقص‌بودند، به‌همین جهت لزوم ساده‌کردن عملیات عددی همچنان بطور جدی احساس می‌شد.

---

*) در این مورد کتاب «در قلمرو ریاضیات» صفحهٔ ۸۱، ترجمهٔ مترجم همین‌کتاب را ببینید.

# ۳

## افکار اولیه دربارهٔ لگاریتم

توانهـای صحیح و متوالی یك عدد ، فکر لگاریتم را بوجود آورد. در این مورد دو تصاعد بدست می‌آیـد: حسابی و هندسی. بین مصریها توانهای عدد۲ معمول‌بود. آنها عمل‌ضرب را به‌طریق دوبرابر کردن انجام می‌دادند. مثلا برای ضرب a در۲۳۵ چنین عمل‌می‌کردند:

| | |
|---|---|
| ۱ | a |
| ۲ | $۲a(=۲^{۱}a)$ |
| ۴ | $۴a(=۲^{۲}a)$ |
| ۸ | $۸a(=۲^{۳}a)$ |
| ۱۶ | $۱۶a(=۲^{۴}a)$ |
| ۳۲ | $۳۲a(=۲^{۵}a)$ |

| | |
|---|---|
| ۶۴ | $۶۴a(=۲^۶a)$ |
| ۱۲۸ | $۱۲۸a(=۲^۷a)$ |
| ۲۵۶ | $۲۵۶a(=۲^۸a)$ |

حاصلضرب مفروض برابر است با:

$$a+۲a+۸a+۳۲a+۶۴a+۱۲۸a=۲۳۵a$$

باید متذکر شدکه مصریها از مفهوم توان اطلاعی‌نداشتند، ولی به اعداد ترتیبی وارد بودند.

به‌این ترتیب می‌بینیم که شماره‌های ردیفها به‌تصاعد حسابی و $۲^۱$، $۲^۲$، ... به‌تصاعد هندسی هستند.

فکر اولیه دربارهٔ محاسبات لگاریتمی ، اگـرچه به‌صورت کاملا ابتدائی و شکل نگـرفتهٔ خود ، از مقابلهٔ جملات تصاعد هندسی بـا جملات تصاعد حسابی بوجود آمد. این مقابله را ارشمیدس هم دریکی از آثار خود بخوبی انجام داده است:

اگر یك رشتهٔ متوالی از اعـداد متناسب ، که از واحـد شروع شده است ، در نظـر بگیـریم و اگـر دو جمله از این رشتـه را درهم ضرب کنیم، حاصلضرب هم جمله‌ای ازهمین رشته خواهدبود، بنحوی‌که فاصله این حاصلضرب از عامل بزرگتر برابر است بـا فاصلهٔ عامل‌کوچکتر از واحد . همچنین فاصلهٔ این حاصلضرب از واحد یك جمله کمتر از مجموع فواصل دو عامل از آن است .

این مطلب را می‌توان به این‌ترتیب روشن کرد:

اگر تصاعد هندسی: $۱ , a , a^۲, a^۳ , ...$

و تصاعد حسابی: ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ،...

را در نظر بگیریم ، حاصلضرب دو جملهٔ $a^m$ و $a^n$ از تصاعد اول، خود جمله‌ای از آن تصاعد است؛ شمارهٔ ردیف جملهٔ حاصلضرب در تصاعد برابر است با مجموع شماره ردیفهای عوامل ضرب بدون واحد .

تقریباً در تمام آثار مهم ریاضی در قرنهای ۱۵ و ۱۶ به این فکر ارشمیدس برخورد می‌کنیم. مثلا ن. شوکه ریاضی‌دان فرانسوی دررسالهٔ «علم عدد» (۱۴۸۴) ، یکی‌از قوانین اساسی محاسبات لگاریتمی‌را بیان می‌کند. او دنبالهٔ توانهای متوالی عدد ۲ و دنبالهٔ توانهای آنها را در نظر می‌گیرد و ثابت می‌کند که حاصلضرب دو جمله از دنبالهٔ اول جمله‌ای از همان دنباله است، که متناظر با مجموع توانهای دو عامل ضرب می‌باشد. شوکه تصاعدهای زیر را تشکیل می‌دهد:

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ...

۱ ، ۲ ، ۴ ، ۸ ، ...

در اینجا ، تصاعد حسابی از صفر شروع می‌شود (در حالی‌که ارشمیدس تصاعد حسابی‌را هم از واحد شروع می‌کرد) ، و در تصاعد هندسی ، جملهٔ دوم برابر است با قدر نسبت تصاعد ، یعنی تصاعد هندسی به‌صورت زیر است:

$$1 , a , a^2 , \dots a^n , \dots$$

تا قرن شانزدهم، تصاعدحسابی وهندسی(بدون تغییرقدرنسبتها)،

فقط از یك طرف بطور نامحدود ادامه‌پیدامی کرد؛ از نقطهٔ شروع به‌طرف راست. فکر ادامهٔ تصاعدها از نقطهٔ شروع به‌سمت چپ (به‌خاطر امکان تشابهی که بین تصاعدها ، یعنی بین هردوجملهٔ متناظر آنها، وجود دارد؛ حتی‌اگر قدر نسبتهای متناظر را هم تغییردهیم) به‌وسیلهٔ شتیفل، ریاضی‌دان آلمانی(۱۴۸۶–۱۵۶۷)بوجود آمد. او دراثر خودبه‌نام «حساب‌عمومی» دنباله‌های زیر را مقابل هم قرار می‌دهد:

$$\ldots,\ -۳,\ -۲,\ -۱,\ ۰,\ ۱,\ ۲,\ ۳,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{۱}{۸},\ \frac{۱}{۴},\ \frac{۱}{۲},\ ۱,\ ۲,\ ۴,\ ۸,\ \ldots$$

و عددهای دنبالهٔ اول را «نماها» نام می‌گذارد.

همانطور که می‌بینیم، دنبالهٔ اول یك تصاعد حسابی ودنبالهٔ دوم یك تصاعد هندسی است. به‌کمك این دو دنباله می‌توان برای ضرب و تقسیم جملات دنبالهٔ دوم و یا به‌توان رساندن و ریشه‌گرفتن از آنها ، اعمال ساده‌تر یعنی جمع ، تفریق ، ضرب وتقسیم را درجملات متناظر دنبالهٔ اول انجام داد. مثلا اگر بخواهیم $۳۲ \times \frac{۱}{۸}$ را حساب کنیم ، به‌جای آن عددهای روی آنها را درتصاعد حسابی باهم‌جمع می‌کنیم: $۲ = ۵ + (-۳)$؛ زیر عدد بدست‌آمدهٔ ۲ از دنبالهٔ اول، عدد موردنظر، یعنی ۴ ، در دنبالهٔ دوم قرارگرفته است.

برای پیداکردن $\sqrt[۵]{۳۲}$ ، عدد ۵ را که روی ۳۲ قرار گرفته است درنظرمی‌گیریم و آن‌را برفرجهٔ رادیکال‌تقسیم می‌کنیم($۵:۵ = ۱$)،

زیر عدد ۱، ریشهٔ مجهول ۲ را پیدا می کنیم.

بنابراین باید اعتراف کرد که فکر اصلی محاسبات لگاریتمی به‌وسیلهٔ شتیفل بیان شده‌است (تبدیل عملیات ازمرحلهٔ بالاتر به‌عملیات ازمرحلهٔ پائین‌تر). باوجوداین او نتوانست ازلگاریتم برای محاسبات‌عملی استفاده کند، زیرا کسرهای اعشاری، که به کمك آنها می‌توان خیلی بکندی تصاعد هندسی را پیش برد، هنوز شناخته نشده بود. این امر عظیم، یعنی محاسبهٔ جدولهای لگاریتمی را، بورگی ریاضی دان سوئدی انجام داد.

متذکر می‌شویم که تنها یك مقابلهٔ تصاعدها نمی‌تواند مفهوم کامل لگاریتم را بدست دهد، زیرا در این مورد تنها لگاریتمهای عددهای دنباله (که بطور منفصل به‌دنبال هم قرارگرفته‌اند) معین می‌شود و این مطلب کاملا مجهول می‌ماند که چگونه باید لگاریتم عددهائی را که در تصاعد هندسی وجود ندارند، بدست آورد. نپر موفق شد که این‌مشکل نظری را حل کند و تعریف کلی لگاریتم را پیدا کند؛ او لگاریتم را به‌صورت ارتباط تابعی جدیدی بین کمیتهای متغیر متصل درنظر گرفت.

# ۴

# مرحلهٔ اول تاریخ تکامل لگاریتم

نپر (۱۶۱۷-۱۵۵۰)

ژان نپر در سال ۱۵۵۰ در قصر اجدادی مرچیستون نزدیک ادینبورگ متولد شد. تا سیزده سالگی در کالج مشغول تحصیل بود. در ۱۵۶۶، دانشمند آینده، به‌منظور تکمیل تحصیلات، به‌اروپا مسافرت کرد و در ۱۵۷۱ به‌قصر خود برگشت و در آنجا تا زمان مرگ خود (که در ۱۶۱۷ پیش آمد) اقامت داشت.

زمینهٔ اساسی کارهای ریاضی نپر، ساده کردن و نظم‌دادن به‌حساب، جبر ومثلثات بود. درسال ۱۶۱۷ اثر خود به‌نام «رابدولوگیا» را منتشر کرد که شامل توضیحاتی دربارهٔ چوبحساب نپر و سایر وسائل برای ساده کردن ضرب و تقسیم بود. در این اثر، نپر توضیح می‌دهد که

جدولهای («کانون») لگاریتمی خود را خیلی قبل از انتشار آنها تنظیم کرده است.

نپر لگاریتم را مستقلا کشف کرد. مشکل می‌توان فهمید که نخستین فکر مربوط به‌لگاریتم چه موقع در نپر بوجود آمد و برای رساندن این فکر به یك دستگاه کامل و انجام کار عظیم تنظیم جدولها، چقدر وقت لازم بود. در سال ۱۵۹۴ یك اسکاتلندی، دوست خانوادهٔ نپر، به تیخوبراههٔ منجم اطلاع داد که وسیلهٔ جدید محاسبه‌ای به‌نام‌نپر وجود دارد. اگر این تاریخ را صحیح بدانیم، در آن صورت نتیجه می‌شود که نپر قوانین محاسبات لگاریتمی را ۲۰سال قبل‌از انتشار آنها کشف کرده است. نپر در سال۱۶۱۴ «شرح جدولهای عجیب لگاریتم» را چاپ کرد که در آن جدولهای‌لگاریتم داده‌شده، ولی‌ازطریقهٔ محاسبه ذکری‌به‌میان نیامده‌است. منتهی درهمانجاگفته‌شده که این‌روش محاسبه دراثردیگری شرح داده شده است.

بعد از مرگ نپر، کتاب او باعنوان «تنظیم جدولهای عجیب لگاریتم» از چاپ خارج شد (۱۶۱۹). کتاب را پسر او، روبرت‌نپر، منتشر کرد.

ظاهراً «تنظیم» به‌جای کلمهٔ قبلی «شرح» است، زیرا اصطلاح لگاریتم (از کلمه‌های یونانی: λόγος ـ رابطه، αριθμός ـ عدد) تنها در عنوان‌کتاب دیده می‌شود و در متن لگاریتمها «اعداد تصنعی» نامیده شده‌اند.

«شرح» از دو قسمت تشکیل شده است . در قسمت اول تعریف لگاریتم ، خواص آن و موارد استعمال آن در عملیات عددی و مسائل مربوط به مثلثات مسطحه و کروی داده شده است. علاوه بر آن قاعدهٔ معروف به‌پنج ضلعی نپر هم ذکر شده است ، که به‌کمك آن می‌توان همهٔ روابط بین زوایا و اضلاع يك مثلث کروی را نوشت. قسمت اول کتاب شامل۷۵صفحه توضیح وقسمت دوم شامل۹۰صفحه جدول‌است.

جدولهای نپر ـ لگاریتمی ـ مثلثاتی است و این بدان مناسبت است که‌در آن‌زمان احتیاج فوق‌العاده‌ای‌به‌ساده‌کردن‌محاسبات‌لگاریتمی بود. در آن موقع شعاع دایره یا به اصطلاح «سینوس‌کامل» را مساوی ۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ می‌گرفتند و همهٔ خطوط مثلثاتی (سینوس ، کسینوس ، تانژانت وغیره) را به‌صورت عددهای صحیح بیان می‌کردند. نپرهم لگاریتمها را به‌عنوان عددهای صحیحی، شامل ۸ رقم، داده‌است. این مطلب روشن می‌کند که کسرهای اعشاری ، اگرچه در آن زمان شناخته شده بود ، ولی هنوز مورد استعمال عمومی پیدا نکرده بود.

درجدولهای نپر مقادیرطبیعی سینوس‌و کسینوس و لگاریتمهای آنها و تانژانت زوایای از صفر تا ۹۰ درجه ، دقیقه به دقیقه ، ذکر شده است.

جدول بطور نیم مربعی تنظیم شده است ، یعنی در يك سطر لگاریتمهای سینوس زوایای متمم تا ۹۰ درجه قرارگرفته است . در ستونی زیر عنوان «اختلافات»، تفاضلهای این لگاریتمها داده شده ، که

درحقیقت لگاریتم تانژانت زوایای مربوطه‌است. لگاریتم سینوس کامل مساوی صفر قبول شده است و لگاریتم بقیهٔ سینوسها ، عددهای مثبتی هستند که با کوچك شدن زاویه ، بزرگ می‌شوند.

کتاب دوم نپر ـ «تنظیم» ـ خیلی جالب‌تر است؛ در این کتاب خواص اصلی لگاریتم ذکر نشده است ، درعوض شرح مفصلی دربارهٔ طریقه‌ای داده شده است که به‌کمك آن می‌توان لگاریتمها را محاسبه کرد. به‌ضمیمهٔ آن از دستگاه جدید لگاریتمی نام برده شده است که خیلی ساده‌تر است و اساساً همان دستگاه اعشاری لگاریتمی است. علاوه براین، دراین اثر برای نخستین بار به‌اصطلاح «آنالوژی(قیاس) نپر» برخورد می‌کنیم .

## تعریف لگاریتم از نظر نپر

فصل اول کتاب «شرح» نپر، شامل تعاریف است. این تعاریف چنین‌اند:

**تعریف ۱** . گویند خطی بطور یکنواخت نمو می‌کند،وقتی که نقطه‌ای که‌آن‌را رسم می‌کند، در زمانهای مساوی فواصل‌مساوی را طی‌کند.

**تعریف ۲** . گویند خطی بطور متناسب قطع می‌شود ، وقتی که نقطه‌ای که روی‌آن حرکت می‌کند ، در زمانهای مساوی پاره خطهائی‌را قطع کند که نسبت هریك ازآنها به‌خطی که روی‌آن بوجود

آمده‌اند، مقدار ثابتی باشد.

**تعریف ۳.** گویند کمیت عدد های گنگ یا غیرقابل بیان بوسیلهٔ عددهائی باحداکثر تقریب معین‌شده‌اند، وقتی که با بزرگترین عددی معین شده باشندکه بامقدار حقیقی کمیت گنگ کمتر از یك واحد اختلاف داشته‌باشند.

**تعریف ۴.** حرکتهای همزمان به‌حرکتهائی گفته می‌شود که باهم و در یك فاصلهٔ زمانی انجام می‌گیرند.

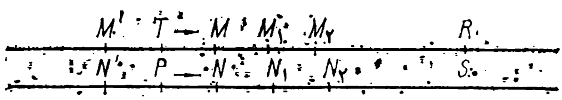
**تعریف ۵ و پوستولات.** چون حرکتهائی وجود دارد که از حرکت مفروضی کندتر یا سریع‌تر باشند، از آنجا باید نتیجه گرفت که حرکتی هم‌سرعت با هرحرکت مفروض وجود دارد (که ماآن‌را به‌عنوان حرکتی‌تعریف می‌کنیم که نسبت به‌حرکت مفروض نه‌کندتر است و نه سریع‌تر).

**تعریف ۶.** لگاریتم سینوس، به‌عددی گفته می‌شود که با حداکثر تقریب خط، که بطور یکنواخت بزرگ می‌شود، بدست آید؛ ضمناً خط سینوس کامل تا مقدار سینوس مفروض بطور متناسب قطع می‌شود، ضمناً هردو حرکت همزمان و در ابتدا هم‌سرعت‌اند.

همانطور که می‌بینیم از کنار اشکالی که به مناسبت مقابلهٔ تصاعد حسابی و تصاعد هندسی که در تنظیم مفهوم لگاریتم پیدا می‌شود، رد می‌شود؛ درحقیقت این‌اشکال عبارت‌است از رابطهٔ دنبالهٔ نپری اعداد و لگاریتمهای آنها بوسیلهٔ فواصلی که دو نقطه، طبق قاعدهٔ معینی طی کرده‌اند.

حرکتی را که نپر درنظر می‌گرفت، شرح می‌دهیم. فرض کنید TR یك پاره خط و PS ، نیم‌خطی که از نقطهٔ P شروع شده است ، باشد (شکل ۱) . دو نقطه در نظر می‌گیریم که بطور همزمان حرکت می‌کنند؛ یکی از آنها از T به‌طرف R و دیگری از P درامتداد PS .

فرض می‌کنیم که سرعت حرکت آنها در نقطه های T و P یکنواخت باشد، ضمناً حرکت نقطه برخط دوم یکنواخت است، ولی نقطه‌ای که روی خط اول حرکت می‌کند ، حرکت کندشوندهٔ متناسبی دارد ، به‌این ترتیب که وقتی مثلا در وضع M قرار می‌گیرد ، سرعت آن متناسب با فاصلهٔ طی‌نشدهٔ MR می‌باشد.




شکل ۱

وقتی که نقطهٔ اول فاصلهٔ TM را در همان زمانی طی کند که نقطهٔ دوم از فاصلهٔ PN عبور کرده است ، نپر فاصلهٔ دوم را لگاریتم MR می‌نامد.

فرض می‌کنیم سرعت اولیهٔ نقطه‌ها $\mathrm{TR}=v$ (ضریب تناسب مساوی واحد است) خیلی بزرگ باشد. در این‌صورت درجریان فاصلهٔ زمانی $\frac{1}{v}$ ، نقطه‌ای که برخط دوم حرکت می‌کند ، فاصله‌ای مساوی $v\cdot\frac{1}{v}=1$ را طی می‌کند.

نقطه‌ای که باسرعت اولیهٔ $v$ برخط اول حرکت می‌کند در همین زمان به‌انتهای قطعهٔ اول می‌رسد که فاصلهٔ آن به واحد خیلی نزدیک است ، و وقتی که در وضع M قرار می‌گیرد سرعتی مساوی:

$MR = v - ۱ = v\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)$ دارد.

درجریان قطعهٔ دوم ، یعنی درفاصلهٔ زمانی $\frac{۱}{v}$ بعدی ، سرعت نقطه‌ای که برخط اول حرکت می‌کند ، تقریباً مساوی $v - ۱$ است و بنابراین فاصله‌ای مساوی $MM_۱ = \frac{v-۱}{v}$ را طی می‌کند و بنابراین خواهیم داشت:

$$M_۱R = MR - MM_۱ = v - ۱ - \frac{v-۱}{v} = v\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)^۲$$

به‌همین ترتیب می‌توان بدست آورد که فاصلهٔ نقطهٔ R از انتهای قطعهٔ سوم مساوی $v\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)^۳$ و از انتهای قطعهٔ چهارم مساوی $v\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)^۴$ و از انتهای قطعهٔ $v$ ام مساوی $v\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)^v$ می‌باشد.

فواصل نقطه‌ای را که برخط اول حرکت می‌کند، از R وفواصل نقطهٔ متحرك دوم را از P ؛ در انتهای هرفاصلهٔ زمانی، می‌نویسیم. دو دنبالهٔ زیر بدست می‌آید:

$$v \,،\, v\left(۱ - \frac{۱}{v}\right) \,،\, v\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)^۲ \,،\, \ldots \,،\, v\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)^v \,، \qquad (۱)$$

$$۰ \,،\, ۱ \,،\, ۲ \,،\, \ldots \,،\, v \,. \qquad (۲)$$

دنبالهٔ (۱) یك تصاعد هندسی و دنبـالهٔ (۲) یك تصاعد حسابی است و طبق استنباط نپر جمله های دنبالهٔ (۲) لگاریتمهای جمله های دنبالهٔ (۱) را تشکیل می‌دهند.

همانطور که می‌بینیم دراینجا کشف نپر باافکار ارشمیدس، شتیفل و دیگران شباهت دارد. ولی در آنچه که نپر بیان می کند فکر تازه‌ای‌هم وجود دارد، این تازگی عبارت‌است از رابطهٔ تابعی که بین مقادیرمتغیر و متصل آوندها وجود دارد. نپر عدد $v$ را مساوی $10^7$ می‌گیرد. برای او ، صفر لگاریتم عدد $v$ ، پاره خط TR ـ سینوس ۹۰ درجه (شعاع) و n مساوی $10^7$ است. بنابراین در این دستگاه ، لگاریتم سینوس‌کامل مساوی صفر انتخاب شده واین به ساده‌شدن محاسبات لگاریتمی خیلی کمك می کند، زیرا در مثلثات اغلب به‌ضرب درسینوس‌کامل ویا تقسیم بر آن برخورد می کنیم (در لگاریتم امروزی صفـر مساوی با لگاریتم واحد است). نپر لگاریتم سینوسها ، ونه لگاریتم عددهای متوالی، را محاسبه کرد.

اگر نقطهٔ اول قبل از آنکه درT باشد، درموقعیت $M'$ قرارگرفته باشد،طول $RM'$ بزرگتر ازسینوس کامل خواهدبودو نقطهٔدوم‌هم‌درموقعیتی مثل $N'$ قرار می‌گیرد. نپر دراین‌حالت، لگاریتم $RM'$ را عددی منفی درنظر می‌گیردکه قدرمطلق آن برابر باطول پاره‌خط $PN'$ است.

ازآنچه‌گفتیم روشن می‌شودکه لگاریتم نپر بـا لگاریتم طبیعی، که مبنای آن ... $e = 2{,}7182$ می‌باشد ، فرق دارد؛ اگرچه دربعضی

از کتابهای جبر و آنالیز اغلب کشف لگاریتم طبیعی را به‌نپر نسبت داده‌اند. درحقیقت در لگاریتم نپری از مبنا نمی‌توان صحبت کرد، زیرا در آنجا لگاریتم واحد برابر صفر نیست ، ولی اگر هریك از جمله‌های تصاعد هندسی و تصاعد حسابی را بر $10^7$ ($v$) تقسیم کنیم، بدست می‌آید:

$$1,\ (1-\frac{1}{10^7}),\ (1-\frac{1}{10^7})^2, \ldots, (1-\frac{1}{10^7})^{10^7},$$

$$0,\ \frac{1}{10^7},\ \frac{2}{10^7}, \ldots, 1$$

که‌در آن،واحد لگاریتم $(1-\frac{1}{10^7})^{10^7}$ می‌شود که تقریباً مساوی $\frac{1}{e}$ است.

خود نپر هم به‌این مطلب اشاره می‌کند که در انتخاب دستگاه لگاریتمی نوعی اجبار وجود داشته است*.

متذکر می‌شویم که باترجمه به‌زبان ریاضیات امروزی ، می‌توان حرکت دو نقطه را به صورت رابطهٔ دیفرانسیلی مستقیمی بین دو کمیت متغیر (عدد و لگاریتم آن) ، ساده کرد.

اگر عدد را به $x$ ، لگاریتم آن‌را به $y$ وسرعت ثابت نقطه‌ای را که برخط دوم حرکت می‌کند به $v$ نشان دهیم ، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dy}{dt}=v \qquad (3)$$

---

*) باید متذکر شد که اولین جداول لگاریتم طبیعی را **سپیدل** ریاضی‌دان انگلیسی در کتاب خودش به‌نام «لگاریتمهای جدید» (۱۶۱۹) تنظیم کرد.

دستگاه تکمیل شدهٔ لگاریتم طبیعی به **ولفرام** هلندی مربوط است. جدولهای ولفرام درسال ۱۷۷۸ چاپ شد.

که در آن t نمایندهٔ زمان است.

سرعت نقطه‌ای که بر خط اول حرکت می کند مستقیماً با x متناسب است ، یعنی برابر است با ax. اگر درنظربگیریم که x درجریان زمان تنزل می کند، بدست می آید:

$$\frac{dx}{dt} = -ax \qquad (۴)$$

بین روابط (۳) و (۴) ، مقدار زمان را حذف می کنیم ، به‌معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{ax}{v} \quad \text{یا} \quad dy = -\frac{v}{ax}dx$$

و جواب آن:

$$y = -\frac{v}{a}\ln x + c$$

مقادیر ثابت a و c را معین می کنیم. به‌ازای $x = ۱۰^۷$ داریم : $v = -\frac{dx}{dt}$ ، از طرف دیگر $-\frac{dx}{dt} = ax$ ، بنابراین $v = ۱۰^۷ \times a$ و از آنجا $a = \frac{v}{۱۰^۷}$ می‌شود. به‌ازای $x = ۱۰^۷$ ، $y = ۰$ می‌شود و از آنجا $c = ۱۰^۷ \ln ۱۰^۷$ خواهد بود.

رابطهٔ بین لگاریتم نپر (L) و لگاریتم طبیعی‌را بدست می آوریم:

$$y = Lx = ۱۰^۷ \ln \frac{۱۰^۷}{x}$$

همانطور که می‌بینیم در تعریفی که نپر برای لگاریتم می کند، فکر

معادلهٔ دیفرانسیل هم وجود دارد ، ولی این فکر تنها در آنالیز ریاضی معاصر توانست مورد استعمال وسیع پیدا کند.

## خواص اساسی لگاریتم و نامساویها برای تفاضل لگاریتمهای دو عدد از نظر نپر

نپر خاصیت مهم زیر را برای لگاریتمها تنظیم کرد: **لگاریتمهای عددهای متناسب، تفاضلهای مساوی دارند**، یعنی اگر چهارعدد $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ تناسب $A:B=C:D$ را تشکیل دهند ، خواهیم داشت:

$$LA-LB=LC-LD$$

نپر تقریباً به این ترتیب این خاصیت را ثابت می کند. او حرکت نقطه را برخط ، متشابه‌التغییر کندشونـده انتخاب می کند ، سپس چهار وضع نقطه ، و مثلا $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ را درنظر می گیرد . سپس پاره خطهای $AB$ و $CD$ را مورد مطالعه قرار می‌دهد ومعین می کندکه نقطهٔ متحرك ، آنهـا را در فواصل زمانی مساوی طی می کند. نپر بین نقـاط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ نقاط بینابینی قرار می‌دهد وتناسبهای فرعی‌را تشکیل می‌دهد ، سپس حد زمانی را که برای عبور از هرپاره‌خط لازم است و حد زمانی را که برای عبور از پاره خطهـای $AB$ و $CD$ لازم است ، معین می کند. ازنسبتهای مقادیراین‌زمانهادیده می‌شود که‌تعداد پاره‌خطها

به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند و درنتیجه معلوم می‌شود که نسبت زمان لازم برای عبور از پاره‌خطهای AB و CD مساوی واحد است ، یعنی پاره‌خطهای AB و CD در زمانهای مساوی به‌وسیلهٔ نقطه طی می‌شوند و زمان هم باتفاضل لگاریتمهای عددها متناسب است.

به‌این‌ترتیب اگرچهارعدد A ، B ، C ، D تناسب $A:B=C:D$ را تشکیل دهند ، خواهیم داشت:

$$LA-LB=LC-LD$$

این خاصیت لگاریتم را می‌توان در مورد سلسلهٔ اعـداد تعمیم داد . ازاین خاصیت قانون لگاریتم‌گرفتن هم نتیجه می‌شود. مثلا برای اینکه ازحاصلضرب $C=A.B$ لگاریتم بگیریم ، تناسب $\frac{C}{A}=\frac{B}{۱}$ را می‌نویسیم. از این تناسب بدست می‌آید:

$$LC-LA=LB-L۱$$

و از آنجا:

$$LAB=LA+LB-L۱$$

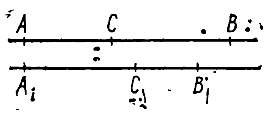
بطوری‌که دیده‌می‌شود، قانون لگاریتم‌گرفتن ازنظرنپر بغرنجتر از دستگاههای دیگر لگاریتمی است ، زیرا در دستگـاه نپر، لگاریتـم واحد برابر صفر نیست.

بالاخره ، نپر برای محاسبهٔ جدولهای لگاریتم ، نامساوی زیررا برای تفاضل‌لگاریتمهای دو عدد می‌دهد :

$$10^7 \frac{N-M}{N} < LM-LN < 10^7 \frac{N-M}{M}$$

استنتاج این نامساوی را (از نظر نپر) ذکر می‌کنیم.

دو خط انتخاب می‌کنیم. پاره‌خط $AB = r = 10^7$ می‌گیریم. فرض می‌کنیم نقطه‌ای روی خط اول با حرکت متشابه‌التغییر کندشونده و روی خط دوم باحرکت یکنواخت حرکت کند (شکل۲).



شکل ۲

وضع اول. حرکت‌نقطه را به‌راست درنظرمی‌گیریم. فرض‌کنید، نقطه دریك فاصلهٔ زمانی روی خط اول راهی مساوی $AC$طی‌کند. $BC$ را به $x$نشان می‌دهیم. دراین‌صورت$AC = AB - BC$ یا $AC = r - x$ خواهد شد ، درهمین زمان نقطه‌ای‌که برخط دوم حرکت می‌کند، راه $A_1B_1 = Lx$ را طی می‌کند. اگر نقاط در $A$ و $A_1$ در یك لحظه بسا سرعتهای مساوی باشند ، بدست می‌آید:

$$AC < A_1B_1 \qquad (5)$$

وضع دوم . فرض‌کنید سرعت نقطـه‌ای که برخط دوم حرکت می‌کند، مساوی سرعت نقطهٔ اول در نقطهٔ $C$ باشد. حرکت‌بعدی آن را یکنواخت درنظر بگیرید. دراین‌صورت نقطه‌ای‌که برخط دوم حرکت می‌کند راه

$$A_1C_1 < AC \qquad (۶)$$

را طی می‌کند.

تناسب زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} < \frac{x}{r},$$

از آنجا:

$$A_1C_1 = \frac{x}{r}A_1B_1,$$

چون $A_1C_1 < AC$ است، بنابراین $\frac{x}{r}A_1B_1 < AC$ می‌شود و از آنجا:

$$A_1B_1 < \frac{r}{x}AC. \qquad (۷)$$

بادرنظر گرفتن نامساویهای (۵) و (۷) بدست می‌آید:

$$AC < A_1B_1 < \frac{r}{x}AC. \qquad (۸)$$

دوعدد مفروض $M$ و $N$ را درنظر می‌گیریم، بطوری‌که $M<N$ باشد. می‌توان تناسب $\frac{M}{N} = \frac{x}{r}$ را نوشت. ازطرفین لگاریتم می‌گیریم، بدست می‌آید:

$$LM - LN = Lx - Lr$$

که درآن $Lr = 0$ است.

حالا نامساوی (۸) را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$r-x<Lx<\frac{r}{x}(r-x)\ ،$$

و چون $x=\frac{M}{N}r$ است ، با قراردادن مقدار x در نامساوی اخیر بدست می‌آید:

$$r\cdot\frac{N-M}{N}<LM-LN<r\cdot\frac{N-M}{M}.$$

نپر تقریب مقدار تفاضل لگاریتمهای دو عدد را نصف مجموع مقادیر دو حد نامساوی می‌گرفت و به‌این ترتیب نتیجه را با خطائی که قابل تخمین بود ، بدست می‌آورد.

## روش محاسبهٔ لگاریتمها که به‌وسیلهٔ نپر بکار می‌رفت

### محاسبهٔ دنبالهٔ

$$۱۰^۷\ ،\ ۱۰^۷(۱-\frac{۱}{۱۰^۷})،\ ۱۰^۷(۱-\frac{۱}{۱۰^۷})^۲\ ،\ \ldots$$

تاجمله‌ای که مساوی نصف جملهٔ اول‌باشد ، مستلزم‌کارفوق‌العاده زیادی است، زیرا دراین مورد باید بیش‌از ۰۰۰ ۹۰۰ ۶ جمله را محاسبه‌کرد. به‌همین‌مناسبت نپر راهی‌را انتخاب‌کرد، که اگرچه بغرنج بنظرمی‌رسد، درحقیقت نه‌تنها کارمحاسبه را ساده می‌کند، بلکه انجام‌آن را درحالت کلی ممکن می‌سازد. نپر دردنبالهٔ‌اول تنها ۱۰۱ جمله‌را محاسبه می‌کند،

سپس تصاعد هندسی دومی تشکیل می‌دهد که جملهٔ اول آن مساوی جملهٔ اول تصاعد اول و جملهٔ دوم آن مساوی (یا تقریباً مساوی) جملهٔ صد و یکم تصاعد اول باشد. در تصاعد دوم ۵۱ جمله را محاسبه می‌کند*.

به همین ترتیب تصاعد هندسی سومی انتخاب می‌کند و ۲۱ جملهٔ آن را محاسبه می‌کند و بالاخره در تصاعد هندسی چهارم، که قدر نسبتی مساوی $(۱-\frac{۱}{۱۰۰})$ دارد، جملهٔ هفتادم به‌ترتیب مساوی نصف $۱۰^{۷}$ است.

پس از آنکه نپر تصاعد هندسی اول و سپس تصاعدهای هندسی بعدی را تشکیل می‌دهد، به‌کمك نامساوی:

$$۱۰^{۷}\frac{N-M}{N} < LM-LN < ۱۰^{۷}\frac{N-M}{M}$$

به‌محاسبهٔ تقریبی لگاریتمهای اعداد می‌پردازد.

## بورگی (۱۶۳۲-۱۵۵۲)

قبلا هم متذکر شدیم که ای‌اوست بورگی ریاضی‌دان سویسی، بدون

---

*) باید متذکر شد که نپر در محاسبهٔ جملهٔ پنجاه و یکم تصاعد هندسی دچار اشتباه محاسبه‌ای می‌شود، یعنی به‌جای عدد ۹ ۹۹۵ ۰۰۱ ۲۲۴ ۸۰۴ برای جملهٔ پنجاه و یکم عدد ۹ ۹۹۵ ۰۰۱ ۲۲۲ ۹۲۷ را بدست آورد، بنابراین رقمهای آخر در لگاریتمهای نپر صحیح نیست. برای اینکه این اشتباه را تصحیح کنیم، باید لگاریتمهای نپر را تقریباً به‌اندازهٔ $۱۰^{-۶} \times \frac{۳}{۸}$ برابر مقادیر آنها افزایش دهیم.

اطلاع ازکارهای نپر جدولهای لگاریتم را تنظیم‌کرد، که در سال ۱۶۲۰ تحت عنوان «جدول تصاعدهای حسابی و هندسی» منتشر کرد. بورگی از سال ۱۶۰۳ تا سال ۱۶۱۱ روی جدولهای لگاریتم‌کار می کرد.

بورگی یك محاسب خستگی‌ناپذیر بود. او ضرب را ، به‌شکلی که ما امروز استفاده می کنیم ، ساده کرد. علاوه‌بر آن ، بدون ارتباط با ستون (۱۵۴۸–۱۶۲۰) ریاضی‌دان هلندی ، بورگی در نوشته های خود قسمت‌اعشاری را ازقسمت صحیح عدد،گاهی به‌وسیلهٔ یك‌نقطه وگاهی به‌وسیلهٔ یك قوس کوچك از هم جـدا می کرد . بورگی همچنین روش محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های معادلات جبری از درجات بالا را کشف کرد. او روش ساده کردن محاسبات را تکمیل کرد و روابط مورد استفادهٔ آن را اثبات کرد. بورگی، بدون اطلاع از کارهای ویت (۱۵۴۰–۱۶۰۳) و ستون، طریقهٔ محاسبهٔ سینوس زاویهٔ مضرب زاویهٔ مفروض‌را کشف کرد. همین‌محاسبات مربوط به‌سنجش زوایا اورا به‌کشف مهمی هدایت کرد- کشف لگاریتم.

ازلحاظ محاسبات عملی، لگاریتم‌بورگی به‌اندازهٔ جدولهای‌نپر اهمیت دارد ، ولی از لحـاظ نظـری لگاریتم بورگی اهمیت خیلـی کمتری دارد.

بورگی برای تنظیم جدولهای لگاریتم دوتصاعد را درمقابل هم قرار می‌دهد: حسابی و هندسی. او تصاعدهای زیررا درنظر می‌گیرد:

تصاعد حسابی

$$۰ , ۱۰ , ۲۰ , \ldots , ۱۰n , \ldots$$

و تصاعد هندسی

$$۱۰^{۸} , ۱۰^{۸}(۱+\frac{۱}{۱۰^{۴}}) , ۱۰^{۸}(۱+\frac{۱}{۱۰^{۴}})^{۲} , \ldots ,$$
$$۱۰^{۸}(۱+\frac{۱}{۱۰^{۴}})^{n} , \ldots$$

بورگی عددهای تصاعد حسابی را عددهای قرمز می‌نامد، و آنها را بارنگ قرمزهم چاپ کرده است. عددهای تصاعد هندسی‌را عددهای سیاه می‌نامد و به‌رنگ سیاه هم چاپ می‌کند.

به‌کمك جدولهای بورگی عددهای سیاه هم پیدا می‌شود ، یعنی جدولهای او نخستین جدولهای آنتی‌لگاریتم است.

اگر جمله‌های تصاعدهای حسابی وهندسی‌را بر $۱۰^{۸}$ تقسیم کنیم، مبنای لگاریتم بورگی ده هزار و یکمین جملهٔ تصاعد هندسی ، یعنی $(۱+\frac{۱}{۱۰^{۴}})^{۱۰^{۴}}$ می‌شود. بورگی این عدد را تارقم هشتم اعشار حساب می‌کند که می‌شود: ۲٫۷۱ ۸۱۴ ۵۹۳ و همانطور که دیده می‌شود این عدد تا رقم سوم اعشار e برابراست.

به‌این ترتیب در اینجا با لگاریتم طبیعی سروکار داریم. باوجود این ، بورگی بکلی با فکر مطالعهٔ عدد به‌عنوان توان یك مبنای معین و لگاریتم آن به‌عنوان نمای عدد بیگانه بود.

## بریگس (۱۵۵۶ - ۱۶۳۰)

کشف لگاریتم در بسیاری از کشورها وبخصوص در انگلستان ارج گذاشته شد، زیرا جوابگوی احتیاجات فوری زمان تکامل‌علم‌بود.

ریاضی‌دان مشهور انگلیسی هانری بریگس کتاب نپر ، «شرح» را تحسین زیادکرد . او دو بار به دیدار نپررفت (در ۱۶۱۵ و۱۶۱۶)، و شروع به تنظیم جدولهای لگاریتمی کرد که جوابگوی دستگاه محاسبهٔ اعشاری (و حتی وسیع تر از آن) بود. معمولاً کشف لگاریتم اعشاری رابه‌بریگس‌نسبت می‌دهند وآن‌را«لگاریتم بریگس» می‌نامند، ولی‌این مطلب‌کاملا صحیح نیست .

بریگس دستگاه لگاریتمی پیشنهاد کرد که در آن سینوس کامل (سینوس‌کامل را مساوی $10^{10}$ گرفته بود ) مساوی صفرفرض‌شده بود، و لگاریتم یك دهم سینوس‌کامل ($10^{9}$)، مقدارسینوس‌کامل داده شده بود (دراین‌باره‌بریگس درمقدمهٔ کتاب «حساب لگاریتمی» نوشته است).در نظراول، بریگس بادستگاه لگاریتمی جدید خود،کار نپر را تعمیم داده است ، ولی نپر در بارهٔ این تغییر فکر کرده بود که بهتر است صفر را به عنوان لگاریتم ۱و۱۰ را به عنوان لگاریتم سینوس کامل قبول‌کنیم. بریگس قبول‌کردکه این روش ساده‌تر است .

در کتاب «شرح» نپر اشاره‌ای دربارهٔ دستگاه ساده‌تر لگاریتمی

وجود دارد:

... اگر من ببینم که این کشف مورد تأیید دانشمندان قرار گرفته است، ممکن است در مدت کمتری روشی را شرح بدهم که چگونه می‌توان کار را بهتر کرد و یا حتی از نو آن‌را به‌صورت بهتری عرضه کنم؛ در این صورت با کوشش محاسبان بسیاری که در همهٔ جهان به‌آن می‌پردازند، نتیجه‌ای دقیق‌تر و قابل‌اعتمادتر بدست می‌آید. هیچ‌چیز در ابتدای خود کامل نیست.

در کتاب «تنظیم»، نپر بطور کاملا مشخصی از دستگاه اعشاری لگاریتم صحبت می‌کند (صفر به عنوان لگاریتم واحد و ۱۰ به عنوان لگاریتم $10^{10}$ پیشنهاد می‌شود). علاوه بر این، نپر دوروش برای محاسبهٔ این لگاریتمها بدست می‌دهد.

نپر در «رابدولوگیا» چنین می‌نویسد:

حالادیگرما نوع بسیار زیبائی از لگاریتمهارا پیدا کرده‌ایم و تصمیم گرفته‌ایم که آن‌را به عنوان‌وسیلهٔ محاسبه، همراه باطریقهٔ استفاده‌از آن منتشر کنیم. ولی محاسبهٔ جدولهای جدید را... به‌هانری بریگس استاد هندسه درلندن ویکی از بهترین‌دوستان من، کسی که دراین‌راه با تجربه است و قبل ازهمه اهمیت آن را درک کـرده است، تقدیم می‌کنم.

به این ترتیب، لگاریتمهای اعشاری را نپر آورد و بریگس آنها را با استفاده از دو روشی که نپر عرضه کرده بود، تنظیم نمود.

بریگس درسال ۱۶۱۷ جدولهای لگاریتم اعشاری را منتشر کرد که شامل لگاریتمهای هزار عدد اولیه با چهارده رقم بود. درسال ۱۶۲۴

اثر بزرگ خود «حساب لگاریتمی» را نشر داد. جدولهای این کتاب، لگاریتمهای اعشاری را با۱۴ رقم برای عددهای از ۱ تا ۰۰۰ ۲۰ و از ۰۰۰ ۹۰ تا ۰۰۰ ۱۰۰ و در بعضی‌نسخه‌ها تا ۰۰۰ ۱۰۱ می‌دهد.*

سپس بریگس جدولهای بزرگتری را تدارك دید، ولی به‌انتشار آنها موفق نشد؛ بعد از مرگ او، هلی براند (۱۵۹۷ – ۱۶۳۷) این جدولها را تمام کردو ولاك آن را تحت‌عنوان «مثلثات بریتانیائی» منتشر کرد. در این جدولها، لگاریتم سینوسها با ۱۴ رقم ولگاریتم تانژانتها با۱۰ رقم‌داده شده است. درجه ودقیقه به ترتیب به ۱۰۰ دقیقه و ۱۰۰ ثانیه تقسیم شده‌اند و ازآنجا که این تقسیم‌بندی غیرعادی بود، ولاك درسال ۱۶۳۳ کتاب«مثلثات عملی» را منتشر کرد، که درآن باتقسیمات معمولی زوایا ۱۰ثانیه به‌۱۰ ثانیه، لگاریتم‌خطوط مثلثاتی داده شده‌بود. بعد ازانتشار این جدولها، کار عظیم محاسبهٔ اولین جدولهای بزرگ لگاریتم اعشاری پایان پذیرفت.

*

حال ببینیم چه عواملی موجب پدید آمدن لگاریتم اعشاری‌شد.

دردستگاه لگاریتم قدیمی قاعدهٔ لگاریتم‌گرفتن پیچیده بود واین پیچیدگی تنها وقتی ساده می‌شد که لگاریتم واحد مساوی صفر قبول

---

*) جای خالی کتاب بریگس به وسیلهٔ **ولاك** (۱۶۰۰ – ۱۶۶۷) ریاضی‌دان هلندی درسال ۱۶۲۸ پرشد او لگاریتم‌همهٔ عددهای از ۱ تا ۰۰۰ ۱۰۰ را، منتهی‌فقط با ۱۰ رقم، داده است. به ضمیمهٔ آن جدولهای لگاریتم اعشاری خطوط مثلثاتی یك دقیقه به یك دقیقه داده شده است.

می‌شد. علاوه بر آن،اختلاف لگاریتمهای دو عددی‌که به نسبت ۱:۱۰ باشد،با عدد بزرگ ۲۳۰۲۵۸۴۲ بیان می‌شد. به این ترتیب برای ضرب عددی در $۱۰^n$ یا تقسیم بر آن ($n = ۱, ۲, ...$) باید مضربی از این عدد را جمع و یا کم کنیم ، درحالی که در دستگاه لگاریتم اعشاری خیلی ساده ممیز را منتقل می کنیم .

دو روشی را که نپر برای محاسبهٔ لگاریتم اعشاری داده است، بررسی می کنیم. روش‌اول رابا نقطه نظرامروزی می‌توان به این ترتیب توضیح داد .

فرض کنیم که می‌خواهیم لگاریتم عدد a را تا ۱۴ رقم بدست آوریم . عدد را بین ۱ و ۱۰ درنظر می‌گیریم . اگر a را بتوان $۱۰^{۱۴}$ برسانیم، مفسر عدد $a^{۱۰^{۱۴}}$، ۱۴رقم اولیهٔ بعد ازممیز را برای لگاریتم‌عدد a می‌دهد. برای اینکه این مفسر را بدست آوریم، باید بدانیم در عدد $a^{۱۰^{۱۴}}$ چند رقم وجود دارد . پیدا کردن همهٔ رقمها مسئلهٔ بسیار مشکلی است، در حالی که تعیین تعداد آنها بسیار ساده است، یعنی برای پیدا کردن تعداد رقمهاباید از قاعدهٔ زیراستفاده کرد: تعدادارقام حاصلضرب برابر است با مجموع رقمهای عوامل ضرب ، به شرطی که حاصلضرب رقمهای سمت چپ عوامل،دورقمی باشد؛یابرابراست‌بامجموع‌رقمهای عوامل ضرب منهای یك، به شرطی که حاصلضرب رقمهای سمت چپ عوامل، یك رقمی باشد.

بریگس این روش را برای عدد ۲ بکار برد وپیدا کرد که تعداد

رقمهای عدد $۲^{۱۰^{۱۴}}$ مساوی ۳۰ ۱۰۲ ۹۹۹ ۵۶۶ ۳۹۹ می‌باشد و در نتیجه بدست آورد :

$$\lg ۲ = ۰,۳۰۱۰۲۹۹۹۵۶۶۳۹۸$$

از آنجا کـه محاسبهٔ لگاریتمها با این روش مستلزم کار زیادی بود ، تنها در موارد استثنائی به آن می‌پرداختند و در اساس ازروش دیگری استفاده می کردند . اگر روش دوم را عمیق‌تر مورد مطالعه‌قرار دهیم،می‌توان تأکید کرد که‌بریگس‌از تساوی تقریبی زیراستفاده‌می کرد:

$$\ln N \# m(\sqrt[m]{N} - ۱) \text{ و}$$

که در آن m عددی به اندازهٔ کافی بزرگ است .

درحقیقت می‌توان ثابت کرد :

$$\underset{m \to \infty}{\text{حـد}} \frac{N^{\frac{۱}{m}} - ۱}{\frac{۱}{m}} = \ln N$$

این رابطه‌رامی‌توان به‌کمك دستور هوپیتال ویا با روش‌مقدماتی ثابت کرد.

بریگس برای بدست آوردن لگاریتم طبیعی ۱۰، بطور متوالی ۵۴ مرتبه از آن جذرمی گیرد(بین۲۷ تا ۳۳ رقم).می‌بینیم که دراینجا m مساوی $۲^{۵۴}$ انتخاب شده است واین روشن می کند کـه ساده‌ترین راه جذرگرفتنهای متوالی است .

اگر بخواهیم محاسبهٔ بریگس راانجام دهیم‌جای‌زیادی می‌گیرد، بنا بر این عدد آخر او را می‌دهیم:

$$\sqrt[۲^{۵۴}]{۱۰}-۱=۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۷۸۱۹۱۴۹۳۲۰۰۳۲۲۳۵$$

اگر این‌عددرا در $۲^{۵۴}$ ضرب کنیم، لگاریتم‌طبیعی عدد ۱۰ بدست می‌آید.

روشن است که بسادگی می‌توان مدول دستگاه لگاریتم اعشاری $(M=\frac{۱}{\ln ۱۰})$ را هم بدست آورد.

بریگس برای بدست آوردن لگاریتم ۲،چهل وهفت بار متوالی جذر می‌گیرد و نتیجهٔ $\sqrt[۲^{۴۷}]{۱۰۲۴}$ را پیدا می‌کند، سپس یك واحد از آن کم می‌کند وحاصل را در M ضرب و بالاخره بعداز۴۷ بار دوبرابر کردن آن، لگاریتم‌اعشاری $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$ واز آنجا $\lg ۲$ رابدست‌می‌آورد:

$$\lg ۲=۰,۳۰۱۰۲۹۹۹۵۶۶۳۹۸۱۱۹۵$$

برای محاسبهٔ $\lg ۵$، بریگس از رابطهٔ

$$\lg ۱۰=\lg ۲+\lg ۵$$

استفاده می‌کند که از آنجا $\lg ۵=۱-\lg ۲$ بدست می‌آید.

سپس بریگس لگاریتم عددهای ۳،۷،۱۱ و غیره را پیدا می‌کند وجدول لگاریتم اعداد اول را تا ۱۰۰ تنظیم می‌نماید.

باید متذکر شد که محاسبهٔ لگاریتم عددهای غیر اول، منجربه محاسبهٔ عددهای اول می‌شود، مثلا

$$\lg ۱۵ = \lg(۳ \times ۵) = \lg ۳ + \lg ۵$$

همانطور که می‌بینیم محاسبهٔ لگاریتمها با این روش ، کار بسیار سنگینی است ، بخصوص محاسبهٔ جذرهای متوالی‌مستلزم‌کارفوق‌العاده زیادی است .

علاوه بر دو روشی که ذکر کردیم ، بریگس و ولاك برای محاسبهٔ تقریبی لگاریتمها از روش درج واسطه‌های هندسی و حسابی استفاده می‌کردند .

در بارهٔ این‌روش توضیح می‌دهیم . اگر $\lg y = z$ و $\lg v = x$ باشد ، $\lg \sqrt{vy} = \frac{x+z}{۲}$ خواهد بود. اگر عدد مفروض N بین‌دوعدد $۱۰^{۲}$ و $۱۰^{۳}$ واقع باشد ، کــه لگاریتمهای آنهابه‌ترتیب ۲ و ۳ است ، مــقدار $۱۰^{۲\frac{۱}{۲}}$ را پیدا می‌کنیم . عدد N بین‌دو عدد $۱۰^{۲}$ و $۱۰^{۲\frac{۱}{۲}}$ یا بین دو عدد $۱۰^{۲\frac{۱}{۲}}$ و $۱۰^{۳}$ خواهد بود. درمورد هــر یك از حالتهائی که وجود دارد دوباره واسطهٔ هندسی دو حد را بدست می‌آوریم ، که در نتیجه بــه حدود نزدیکتری نسبت به عدد مفروض می‌رسیم ، اگر همین روش را ادامه دهیم ، می‌توانیم به حدودی برسیم که اختلاف آنها از هر عدد دلخواهی کوچکتر باشد .

نمونه‌ای ذکرمی‌کنیم . فرض کنید که بخواهیم مقدار تقریبی لگاریتم عدد ۵ را بدست آوریم . چون عــدد ۵ بین دو عدد ۱ و ۱۰ قرار داردکه لگاریتمهای‌آنهابه‌ترتیب مساوی ۰ و۱ می‌باشد ،به‌ترتیب

زیر جذرهای مربوطه را حساب می‌کنیم (تا جائی‌که به حدودی برسیم که با عدد ۵ اختلافی نداشته باشد) :

| | | |
|---|---|---|
| A = ۱,۰۰۰۰۰۰ | lgA = ۰,۰۰۰۰۰۰۰ | |
| B = ۱۰,۰۰۰۰۰۰ | lgB = ۱,۰۰۰۰۰۰۰ | $C=\sqrt{AB}$ |
| C = ۳,۱۶۲۲۷۷ | lgC = ۰,۵۰۰۰۰۰۰ | $D=\sqrt{BC}$ |
| D = ۵,۶۲۳۴۱۳ | lgD = ۰,۷۵۰۰۰۰۰ | $E=\sqrt{CD}$ |
| E = ۴,۲۱۶۹۶۴ | lgE = ۰,۶۲۵۰۰۰۰ | $F=\sqrt{DE}$ |
| F = ۴,۸۶۹۶۷۴ | lgF = ۰,۶۸۷۵۰۰۰ | $G=\sqrt{DF}$ |
| G = ۵,۲۳۲۹۹۱ | lgG = ۰,۷۱۸۷۵۰۰ | $H=\sqrt{FG}$ |
| H = ۵,۰۴۸۰۶۵ | lgH = ۰,۷۰۳۱۲۵۰ | $I=\sqrt{FH}$ |
| I = ۴,۹۵۸۰۶۹ | lgI = ۰,۶۹۵۳۱۲۵ | $K=\sqrt{HI}$ |
| K = ۵,۰۰۲۸۶۵ | lgK = ۰,۶۹۹۲۱۸۷ | $L=\sqrt{IK}$ |
| L = ۴,۹۸۰۴۱۶ | lgL = ۰,۶۹۷۲۶۵۶ | $M=\sqrt{KL}$ |
| M = ۴,۹۹۱۶۲۷ | lgM = ۰,۶۹۸۲۴۲۱ | $N=\sqrt{KM}$ |
| N = ۴,۹۹۷۲۴۲ | lgN = ۰,۶۹۸۷۳۰۴ | $O=\sqrt{KN}$ |
| O = ۵,۰۰۰۰۵۲ | lgO = ۰,۶۹۸۹۷۴۵ | $P=\sqrt{NO}$ |
| P = ۴,۹۹۸۶۴۷ | lgP = ۰,۶۹۸۸۵۲۵ | $Q=\sqrt{OP}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $Q=4,999350$ | $\lg Q=0,6989135$ | $R=\sqrt{OQ}$ |
| $R=4,999701$ | $\lg R=0,6989440$ | $S=\sqrt{OR}$ |
| $S=4,999876$ | $\lg S=0,6989592$ | $T=\sqrt{OS}$ |
| $T=4,999963$ | $\lg T=0,6989668$ | $V=\sqrt{OT}$ |
| $V=5,000008$ | $\lg V=0,6989707$ | $W=\sqrt{TV}$ |
| $W=4,999984$ | $\lg W=0,6989687$ | $X=\sqrt{VW}$ |
| $X=4,999997$ | $\lg X=0,6989697$ | $Y=\sqrt{VX}$ |
| $Y=5,000003$ | $\lg Y=0,6989702$ | $Z=\sqrt{XY}$ |
| $Z=5,000000$ | $\lg Z=0,6989700$ | |

به این ترتیب ، با انتخاب واسطه‌ها ،بالاخره به $Z=5,000000$ می‌رسیم ، از آنجا لگاریتم عدد ۵ در مبنای ۱۰ مساوی ۰٫۶۹۸۹۷۰۰ می‌شود . بنا براین بطور تقریب خواهیم داشت :

$$10^{0,6989700} \approx 5$$

متذکر می‌شویم که بریگس در«حساب لگاریتمها» روش محاسبهٔ سریع لگاریتمهای همهٔ عددها را هم می‌دهد که ما به‌شرح آن می‌پردازیم.

عدد $N$ را در نظر می‌گیریم . آن را بــه صورت کسر اعشاری می‌نویسیم :

$$N=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots \qquad (a_0\neq 0)$$

این عدد را بر $a_0$ تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را به صورت اعشاری می‌نویسیم :

$$N = a_0\left(1+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\cdots\right)$$

عامل دوم سمت راست تساوی را بر $\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right)$تقسیم می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$\left(1+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\cdots\right)=\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right)\cdot\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}+\frac{\beta_3}{10^3}+\cdots\right)$$

عامل دوم سمت راست نمی‌توانـد شامل رقـم اول بعد از ممیز باشد . در حقیقت

$$\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)=1+\frac{\alpha_1+1}{10}+\frac{\alpha_1}{10^2}$$

از سمت چپ تساوی قبل بزرگتر است .

به همین ترتیب می‌توان نوشت :

$$\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}+\frac{\beta_3}{10^3}+\cdots\right)=\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}\right)\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}+\frac{\gamma_4}{10^4}+\cdots\right)$$

$$\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}+\frac{\gamma_4}{10^4}+\cdots\right)=\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}\right)\left(1+\frac{\delta_4}{10^4}+\frac{\delta_5}{10^5}+\cdots\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

به این ترتیب ، با توجه به همهٔ این تساویها بدست می‌آید :

$$N = a_0\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right)\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}\right)\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}\right)\cdots,$$

و از آنجا :

$$\lg N = \lg a_0 + \lg\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right) + \lg\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}\right) + \lg\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}\right) + \cdots,$$

که درآن $a_0$ می‌تواند مقادیر ۱، ۲، ۳، ...، ۹ ؛ $\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right)$ مقادیر ۱٫۱ ، ۱٫۲ ، ۱٫۳ ، ... ، ۱٫۹ ؛ $\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}\right)$ مقادیر ۱٫۰۱ ، ۱٫۰۲ ، ...، ۱٫۰۹ را اختیار کند وغیره .

بریگس لگاریتم همهٔ این عددها را ازقبل تا۱۵رقم اعشارحساب کرده بود .

به این‌ترتیب، می‌توان با جمع ساده، لگاریتم عدد N رابدست آورد، به شرطی که قبلاً آن را به صورت یاد شده درآورده باشیم .

حالا هم از این روش برای محاسبهٔ لگاریتم عددهائی استفاده می‌کنند که تعداد ارقام آنها بیش ازآنچه که معمولاً درجدولهاوجود دارد ، باشد . بنا براین در بسیاری از اعمال وجود جدولهای کمکی ، از نوعی که مورد استفاده بریگس قرار می‌گرفت ، لازم است .

# ۵

# مرحلهٔ دوم تاریخ تکامل لگاریتم و توابع نمائی

پیشرفت بعدی نظریهٔ لگاریتمها به وسیع‌تر شدن موارد استعمال هندسهٔ تحلیلی و حساب بی‌نهایت کوچکها ارتباط دارد. برقراری ارتباط بین تربیع هذلولی متساوی الساقین و لگاریتم طبیعی هم به همین دوره مربوط است .

اگر دنباله‌های عددی نپر و بریگس را دقیق‌تر مورد مطالعه قرار دهیم ، می‌توانیم به نمایش تغییرات آنها به صورت پلکانهائی برسیم کـه محاط دریك منحنی نمائی هستند و لگاریتمهای آنها به صورت مجموع مساحتهای مستطیلهائی درمی آید که به‌هذلولی‌متساوی‌الساقینی محدود شده‌اند.

نظریهٔ لگاریتمها دراین مرحله به نام عده زیادی از ریاضی دانها مربوط می‌شود .

### سنت وینسنت (۱۶۶۷ – ۱۵۸۴)

گریگور سنت وینسنت درسال ۱۵۸۴ در بروگ ( بلژیك ) متولد شد ، در رم درس خواند وسپس در پراگ معلم شد . ولی بعد از مدت کوتاهی به وین رفت و سپس به زادگاه خود برگشت وتا سال ۱۶۶۷، سال مرگ او ،درهمانجا بود . سنت وینسنت درسال ۱۶۴۷ اثرمعروف خود «کارهای هندسی» را چاپ کرد که زمینهٔ اصلی آن تربیع دایره و مقاطع مخروطی بود.«کارهای هندسی» شامل روشها و افکار بسیاری است که مبین ابتکارات و کشفیات مؤلف آن است .

در حالی که سنت وینسنت در سال ۱۶۴۷ روی تربیعها کار می‌کرد، به خاصیت مهمی از هذلولی متساوی‌الساقین پی‌برد،خاصیتی که می‌توانست ارتباط بین مساحت محصور بین منحنی و مجانب آن با لگاریتم طبیعی را روشن کند . بر اساس همین خاصیت ، لگاریتم طبیعی را لگاریتم هیپربولی نامیدند .

به این ترتیب ، مساحت هذلولی عبارت است از بیان هندسی لگاریتم ( با توجه به‌علامتهای امروزی) :

$$\int_{1}^{x}\frac{dx}{x}=\ln x$$

### مرکاتور (۱۶۸۷–۱۶۲۰)

نیکلائوس مرکاتور ، ریاضی‌دان ، منجم ومهندس آلمانی ، دراثر خود به نام « فن‌لگاریتم » (۱۶۶۸) رشتهٔ مربوط به بسط $\ln(۱+x)$ را برحسب قوای $x$ بدست آورد .

مرکاتور برای این منظور ابتکارجالب وشجاعانه‌ای‌کرد : برای بسط $\ln(۱+x)$ بـه صورت یك رشته ، باید درکسر $\frac{۱}{۱+x}$، عمل تقسیم را انجام داد و سپس از رشتهٔ بدست آمده انتگرال گرفت :

$$\ln(۱+x) = \int_{۰}^{x} \frac{dx}{۱+x} = \int_{۰}^{x} (۱-x+x^{۲}-x^{۳}+\cdots)dx =$$

$$= x - \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۴}}{۴} + \cdots$$

این عبارت کاملا با فکر مرکاتورتطبیق می‌کند ، اگر چه او از علامتهای $\int$ و $d$ و غیره استفاده نمی‌کرد ؛ علامتهائی‌که مرکاتور بکار می برد خیلی مفصل‌تر بود .

باکشف رشتهٔ لگاریتمی ، روش محاسبهٔ لگاریتمها تغییر کرد : لگاریتمها به‌کمك رشته‌های بی‌نهایت تعیین می‌شدند . رشتهٔ لگاریتمی در ابتدا برای محاسبهٔ لگاریتمهای طبیعی بکار می‌رود و سپس به‌کمك مدول، می توان لگاریتم را در مبناهای دیگر بدست آورد .

### نیوتون (۱۶۴۳ - ۱۷۲۷)

**ایساك نیوتون** ، بااستفاده از افکار مرکاتور ، توانست دوکشف

بزرگ خود را بارورکند . نیوتون برای بیان دو جمله‌ای با هر توان دلخواه ، رشته‌ای بوجود آورد . *

او به کمك تبدیل ماهرانهٔ رشته‌ای که برای تابع $y=\ln x$ وجود داشت ، رشته‌ای برای $e^y$ بدست آورد .

به این ترتیب ، نیوتون نه تنها از افکار مرکاتور استفاده کرد ، بلکه دوکشف جدید هم عرضه نمود : تعمیم قضیهٔ دو جمله‌ای (دربارهٔ این قضیه در نامه‌هائی که به لایپ نیتس نوشته است ، گفتگو می‌کند ) و روش تبدیل رشته‌ها. نیوتون برای نخستین بار از رشتهٔ مرکاتوربرای $y=\ln x$ ، به وسیلهٔ تبدیل آن ، رشتهٔ تابع نمائی را نتیجه‌گرفت :

$$e^y=۱+\frac{y}{۱!}+\frac{y^۲}{۲!}+\cdots$$

و سپس ، با فرض $y=۱$ ، بسط عدد $e$** را بدست آورد :

$$e=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots$$

---

* )اینکه به‌بسط $(a+b)^n$ ، درحالتی‌که $n$ عددی مثبت وصحیح است، نام «دوجمله‌ای نیوتون» را داده‌اند ، درست نیست . این بسط را قبلا **شتیفل** ، **فرما** و **پاسکال**هم داده‌بودند . قبل ازآنها هم **غیاث‌الدین جمشیدکاشانی** وحتی خیلی‌قبل ازآن حکیم **عمرخیام** ازاین بسط اطلاع داشته‌اند.

** ) نیوتون هنوز علامت خاصی برای عدد $e$ نداشت .

همانطور که می‌بینیم ، دراینجا e به‌عنوان $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ حد معین نمی‌شود ، بلکه به وسیلهٔ یك رشته بدست می‌آید .

## تیلور (۱۷۳۱-۱۶۸۵)

**بروك تیلور** ، ریاضی‌دان انگلیسی، درسال ۱۷۱۵ درکتاب‌خود به نام «روش‌نمو» روش کلی بسط یك تابع را بـه صورت یك رشته طرح کرد . تیلور برای اینکه رشتهٔ تابع نمائی را بـه عنوان حالت خاص‌رشتهٔ کلی آن بنویسد ، از رابطه‌ای که شامل تعریف لگاریتم به کمك انتگرال بود: $\frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x}$ ، برای تابع معکوس آن رابطه‌ای بدست آورد که به زبان ریاضیات امروزی به‌صورت $\frac{d(e^y)}{dy}=e^y$ نوشته می‌شود .

تیلور درهمین اثر مقدمات مطالعهٔ ریاضی‌مسئلهٔ مربوط به نوسان سیم را هم پایه گذاشت . قضیهٔ ماندهٔ نهائی هم به او منسوب است . تیلور همچنین مؤلف‌آثاری است در بارهٔ مناظر و مرایا (پرسپکتیو) ، مرکز نوسان ، پرواز گلولهٔ توپ ، تأثیر متقابل آهن رباها وغیره .

طریقهٔ جدیدی هم برای محاسبهٔ لگاریتمها ، بر اساس کسرهای مسلسل ، به تیلور منسوب است .

## اولر (۱۷۸۳-۱۷۰۷)

با اثر لئونارد اولر به نام «مقدمه‌ای بر آنالیز بی‌نهایت کوچکها» قدم بعدی برای تکامل توابع نمائی و لگاریتمی برداشته شد. اولر شرح قضیه‌ای را که قبل از او وجود داشت، با استفاده از کشف خودش به نام آنالیز جبری، کامل‌تر ومنظم‌تر بیان کرد.

او استدلال ساده‌ای برای تبدیل $e^x$ به صورت یك رشته عرضه کرد. شرح خلاصه‌ای از استدلال اولر را می‌آوریم.

اولر در عبارت $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{nx}$، که در آن n و x عددهای صحیحی هستند، رابطهٔ دوجمله‌ای نیوتون را بکار می‌برد، یعنی این عبارت را به صورت یك رشته بسط وسپس n را بـه سمت بی‌نهایت میل می‌دهد. اولر در سمت راست تساوی، حد هرجمله را بطور جـداگانه حساب می‌کند و در نتیجه رشتهٔ نمائی زیر را بدست می‌آورد:

$$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots$$

باید توجه‌کرد که اولـر عدد e را در این رشته بـه عنوان $\lim\limits_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$ معین می‌کند.

فکراینگونه نتیجه‌گیری رشته برای تابع نمائی، نمونه‌ای برای بسیاری از دوره‌های آنالیز شده است. در کارهای بعدی کـه روی مثالهای مختلف انجام گرفت، تاحد زیادی بدقت استدلال کمك‌کرد. مثلاً در تعریف e به عنوان $\lim\limits_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$، از نظر ریاضی امروز،

این مطلب که مجموع حدود جمله‌ها مساوی حد مجموع رشته است ، با دقت ثابت نشده است .

اولر رابطهٔ

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

را بدست می آورد، که معرف رابطهٔ بین توابع نمائی و توابع مثلثاتی است.

کمی مفصل‌تر در بارهٔ این رابطه صحبت می کنیم . این فکر شجاعانه متعلق بـه اولر است که بسط $e^x$ را بـه صورت یك رشته در حالتی بکار برد که عدد حقیقی $x$ در توان بـه عدد موهومی $ix$ تبدیل شده باشد . این فکر را باید هم پر نبوغ دانست (به جهت اثری که در آنالیز داشت) و هم همراه با اشتباه ( به جهت مبانی منطقی آن ) . از نظر منطقی نه تنها اولر حق نداشت رشته‌ای را که برای بسط $e^x$ ثابت شده بود ، برای $e^{xi}$ بکار ببرد ، بلکه حتی بطور کلی در بارهٔ توانهای موهومی وقتی می شود صحبت کرد که مقدمتاً معلوم شود که تحت این نام چه مفهومی مورد نظر است .

علاوه بر آن ، وقتی که اولر در دو طرف تساوی

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots$$

$xi$ را به جای $x$ می‌گذارد ، سمت راست را بـه دوقسمت حقیقی و موهومی تقسیم می کند ، مثل اینکه با یك مجموع معمولی سـرو کار

دارد ، نه یك رشتهٔ بی‌نهایت ، آن هم با عددهای موهومی. ولی اگرچه چنین تبدیلی با عددهای موهومی ورشته‌های بی‌نهایت بی‌اساس باشد، اولر تساوی زیر را بدست آورد :

$$e^{xi}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)+\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)i$$

دیده می‌شود که رشتهٔ بی نهایت داخل پرانتز اول بسط $\cos x$ و پرانتزدوم بسط $\sin x$ است . بنابـــراین اولر هم یکی از روابط مهم را بدست آورد :

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x$$

ریاضی‌دانهای معاصر ، با قبول سادگی فوق‌العادهٔ مورد استعمال این رابطه ، ضعف استدلال منطقی آن‌را محکوم می‌کنند و به همین مناسبت آن را بطور ساده به عنوان تعریف $e^{xi}$ می‌پذیرند : وقتی توان عدد $e$ ، عدد موهومی $xi$ باشد ( که‌در آن $x$ عددی است حقیقی ) ، مقدار آن را عدد مختلط $\cos x+i\sin x$ درنظر می‌گیریم.

رابطهٔ اولررا به ترتیب دیگری هم می‌توان بدست‌آورد ( وقتی که درنظریهٔ توابع با متغیرمختلط مورد مطالعه قرارمی‌گیرد) : به‌کمك رشته‌ای که تابع $e^z$ را معین می‌کند ($z$ عددی است مختلط) ، $z$ را به $xi$ تغییر می‌دهند .

اولر به‌کمك این رابطه، تناوب تابع نمائی و چند ارزشی بودن لگاریتم را کشف کردوثابت کرد که عددهای منفی وموهومی‌هم‌لگاریتم

دارند. به این ترتیب اولر مشکلی را که درنظریهٔ لگاریتمها وجود داشت ، برطرف کرد . با کشف این رابطه، بحثی که مدتها بین لایپ‌نیتس ، برنولی و دالامبر بر سر وجود لگاریتم عددهای منفی جـریان داشت ، به نفع لایپ‌نیتس حل شد .

اولر نخستین کسی بود که آموزش لگاریتم را بر مبنای تعریف آن به عنوان یکی از دو عمل عکس توان قرار داد .

شرح مفهوم لگاریتم بـه عنوان نتیجهٔ یکی از دو عمل عکس توان و قرار دادن آن در ردیف ریشه‌گرفتن ، یك نقص منطقی دارد ، زیرا ریشه‌گرفتن عملی است که عکس توان بطور کلی نیست ، بلکه مربوط به مواردی است که نما عددی طبیعی باشد وبااین قید نمی‌توان مفهوم لگاریتم را در حجم کلی خود نتیجه گرفت .

ولی توضیح مفهوم لگاریتم به این نحو ، قدمی بود که به‌سوی تعریف امروزی لگاریتم ، به عنوان تابع‌معکوس‌تابع نمائی($y=a^x$)، برداشته شد ، که در آن تابع نمائی در مجموعهٔ همه عددهای حقیقی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ولی‌این نقطه نظر، تنها بعداز نظریهٔ عمومی اعداد حقیقی می‌توانست بوجود آید ، که مفهوم توان را با هـرنمای حقیقی دلخواه در نظر می‌گیرد .

بدنیست بدانیم که اولر اولین کسی بود که نام « مانتیس » ( از لاتینی به معنای «اضافه» ) (۱۷۴۸) وعلامت e (۱۷۲۸) را بکاربرد . قبل از اولر ، والیس ( ۱۶۸۵ ) ریاضی دان انگلیسی کلمهٔ مانتیس را

برای قسمت کسری عددی که از عدد صحیح و کسر اعشاری تشکیل شده بود، بکار برد. ولی اولر برای نخستین‌بار در کتاب خود «مقدمه‌ای بر آنالیز بی‌نهایت کوچکها» از آن اختصاصاً بــرای قسمت اعشاری لگاریتم استفاده کرد.

به این‌ترتیب، می‌بینیم که اولر نظریهٔ توابع نمائی و لگاریتمی را خیلی پیشرفت داد؛ منتهی، همانطور که قبلاً هم متذکر شدیم، همیشه در استدلالهای خــود دقیق نبود و بنابراین مبنای دقیق این نظریه را طرح نکرد.

در خاتمه متذکر می‌شویم که مفهوم مربوط به تقارب رشته‌های بی‌نهایت و سایر پروسه‌های بی‌نهایت در اوایل قرن نوزدهم قوام گرفت. اولین کسی که روی این مسئله کار کرد، گوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) ریاضی‌دان آلمانی بود که در سال ۱۸۱۲ مقاله‌ای دربارهٔ رشته‌های فوق هندسی نوشت. سپس درسال ۱۸۲۴، آبل ریاضی‌دان نروژی (۱۸۰۲-۱۸۲۹) اثر خود را دربارهٔ رشتهٔ مربوط به بسط دوجمله‌ای منتشر کرد.

درسال ۱۸۲۱، کوشی ریاضی‌دان فرانسوی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) در اثر خود به نام «دورهٔ آنالیز» برای نخستین‌بار بررسی خصوصیت کلی رشته‌های متقارب را مطرح کرد. نتایج این بــررسیها در بسط توابع نمائی و لگاریتمی به صورت یك رشته بکار رفت، زیرا قبلاً بسط این توابع را به رشته، بدون درنظر گرفتن تقارب رشته‌ها، مطالعه می‌کردند.

کوشی آنالیز بی نهایت کوچکها را بر مبنای دقیقی گذاشت و

همین امر اجازه داد که طرح دقیقی برای نظریهٔ لگاریتمها ریخته شود . نظریه توابع با متغیر مختلط منجر به درك کامل لگاریتم و تابع نمائی شد. کشف و انتشار این نظریه هم بـرای اولین بار بـه کوشی مربوط است . البته قبل از او ، گوس هم خطوط کلی این نظریـه را طرح کرده بود.

# ٦

## تاریخچه‌ای از خط‌کش لگاریتمی

کوشش اولیه را برای درست کردن خط‌کش‌لگاریتمی، چینیها انجام دادند. ولی برای نخستین بار هونتر ( ۱۵۸۱ - ۱۶۲۶ ) استاد دانشگاه لندن در سالهای ۱۶۲۰ - ۱۶۲۳ خط‌کش لگاریتمی را بر مبنای علمی ساخت. خط‌کش فقط با یك مقیاس و تقسیم بندیهای آن ساخته شده بود. این خط‌کش برای محاسباتی که در مورد بکار بردن پرگار لازم بود، مورد استفاده قرارمی‌گرفت. بعدها در سال ۱۶۳۳ ، أاوترد (۱۵۷۴ - ۱۶۶۰ ) دانشمند انگلیسی، با انتخاب دو خط‌کش لگاریتمی توأم، که یکی در امتداد دیگری حرکت می‌کرد، آن را تکمیل نمود.

اولین خط‌کش لگاریتمی را، که استفاده از آن از لحاظ عملی ساده بود، **وینسهات** انگلیسی در سال ۱۶۲۷ ساخت. این خط‌کش از دو مقیاس ساخته شده بود و راه استفادهٔ از آن به همان شکل خط‌کشهای امروزی بود. بالاخره در سال ۱۸۵۱ **مانهایم** افسر توپخانهٔ فرانسوی به خط‌کش لگاریتمی، زائدهٔ متحرکی اضافه کرد، که برای محاسبات بسیار مهم بود.

درسال ۱۷۳۹ آ. د. **فاروارسون** در کتاب خود «کتابی دربارهٔ شرح قطاع ...» خواننده را با محاسبات لگاریتمی و مورد استعمال پرگار متناسب در خط‌کش لگاریتمی آشنا می‌کند.

درسالهای ۱۸۸۰-۱۸۹۰، خط‌کش لگاریتمی فوق‌العاده شیوع پیدا کرد و دیگر یکی از تولیدات کارخانه‌ای شده بود. همراه با آن، مرتباً تغییر شکل می‌داد و تکمیل می‌شد. بیش از همه خط‌کش ۲۵ سانتیمتری عمومیت پیدا کرد، که دقت محاسبهٔ آن برای ضرب و تقسیم تا سه رقم اول حاصل آن است.

# فصل دوم

## تاریخ اثبات گنگ بودن و متعالی بودن عددهای $e$ و $\pi$

# ۱

## گنگ بودن عددهای $e$ و $\pi$

اولین استدلال مربوط به گنگ بودن عددهای $e$ ، $e^x$ و $\pi$ را لامبرت (۱۷۲۸ - ۱۷۷۷) ریاضی‌دان ، فیزیک‌دان و منجم آلمانی در سال ۱۷۶۶ داد . او دو قضیه زیر را ثابت کرد :

اگر $x$ عدد گویای مخالف صفر باشد ، $e^x$ نمی تواند عددی گویا باشد ؛

اگر $x$ عدد گویای مخالف صفر باشد ، $tg\,x$ نمی‌تواند عددی گویا باشد .

برای اثبات قضیهٔ اول ، لامبرت از تبدیل به کسر مسلسل استفاده می کند :

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cdots}}}}}}$$

از این تبدیل او بدست می‌آورد

$$\frac{e-1}{e+1} \quad \text{و} \quad \frac{e^2-1}{e^2+1}$$

و

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\cdots}}}}$$

برای اثبات قضیهٔ دوم، لامبرت $tg\,x$ را به کسر مسلسل تبدیل می‌کند

$$tg\,x=\cfrac{1}{\frac{1}{x}-\cfrac{1}{\frac{3}{x}-\cfrac{1}{\frac{5}{x}-\cfrac{1}{\frac{7}{x}-\cfrac{1}{\frac{9}{x}-\cdots}}}}}$$

لامبرت به کمك این تبدیلها ثابت می کند که به‌ازای عدد گویای x ، نه $e^x$ و نه $tg\,x$ نمی‌توانند گویا باشند . در حالت خاص، به‌ازای $x=\frac{\pi}{4}$ ، $tg\,x=1$ می‌شود و از اینجا نتیجه می‌شود که π عددی گنگ است .

ولی لامبرت اثبات دقیق گنگ بودن عددهای e و π را نمی‌دهد، زیرا لم زیر را ثابت نمی‌کند : اگر در ساختمان کسر مسلسل نامحدود زیر :

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cdots}}}$$

m ، n ، m´ ، n´ وغیره عددهای صحیح مثبت یامنفی باشند وضمناً کسرهای $\frac{m}{n}$ ، $\frac{m'}{n'}$ وغیره ازلحاظ قدرمطلق کوچکتر از واحد باشند ، مقدار این کسرعددی گنگ خواهد بود.

اثبات این لم را به ترتیبی که لژاندر ( ۱۷۵۲– ۱۸۳۳) ریاضی‌دان فرانسوی داده است ، می‌آوریم :

«ابتدا اثبات می کنیم که این مقدار از واحد کوچکتر است . بدون اینکه به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود ، می‌توان فرض کرد که

همهٔ مخرجهای $n$ ، $n'$ ، $n''$ و غیـره ، عددهائی مثبت هستند . اگـر فقط اولین حلقهٔ این کسر را در نظر بگیریم ، طبق فرض $\frac{m}{n}<1$ است. حالا حلقهٔ بعدی را هم انتخاب می‌کنیم ، با توجه به اینکه $\frac{m'}{n'}<1$ است نتیجه می‌گیریم که $n+\frac{m'}{n'}$ از $n-1$ بـزرگتر است ؛ و چـون $m$ کوچکتر است از $n$ و هر دوی آنها عددهائی صحیح هستند ، $m$ هم کوچکتر از $n+\frac{m'}{n'}$ می‌شود.

بنابراین کسر

$$\frac{m}{n+\frac{m'}{n'}}$$

که از دو حلقهٔ اول کسر مسلسل درست شده است ، از واحد کوچکتر است .

سپس سه حلقه را در نظر می‌گیریم . قبلاً می‌توان ثابت کرد که مقدار کسر $\frac{m'}{n'+\frac{m''}{n''}}$ ، که از حلقه‌های دوم وسوم تشکیل شده است ، کوچکتراز واحد است . اگر مقدار کسر اخیر را $\omega$ بنامیم ، می‌بینیم که $\frac{n}{n+\omega}$ هم از واحد کوچکتر است . بنابر این کسر

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}}$$

هم ، که از سه حلقه تشکیل شده است ، کوچکتر از واحد است .

اگر استدلال را به همین ترتیب ادامه دهیم ، می‌بینیم کـه هر چند حلقه از این کسر را که در نظر بگیریم ؛ مقداری بدست می‌آید که درهرحال از واحد کوچکتر است ؛ از آنجا نتیجه می‌شود که تمام کسر ، که تا بی‌نهایت ادامه دارد ، از واحد کوچکتر است . این کسر تنها در حالتی مساوی واحد می‌شود که به صورت زیر باشد :

$$\cfrac{m}{m+۱-\cfrac{m'}{m'+۱-\cfrac{m''}{m''+۱-\cdots}}}$$

فرض می‌کنیم که مقدار کسر مسلسل ما گنگ نباشد و مساوی عددگویای $\frac{B}{A}$ باشد ، کـه در آن A و B اعدادی صحیح‌انـد . در این حالت داریم :

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cdots}}}$$

سپس فرض می‌کنیم C ، D ، E و غیره به ترتیب از تساویهای زیر بدست آیند :

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cdots}}},$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{VI}}{n^{IV}+\cdots}}}$$

و به همین ترتیب تا بی‌نهایت . چون همهٔ جمله‌های این کسرهای مسلسل مختلف کوچکتر از واحدند ، براساس آنچه کـه قبلاً ثابت کردیم ، کسرهای $\frac{B}{A}$ ، $\frac{C}{B}$ ، $\frac{D}{C}$ ، $\frac{E}{D}$ و غیـره هم کوچکتر از واحـدند ، یعنی $B<A$ ، $C<B$ ، $D<C$ و غیـره . از اینجا نتیجه می‌شود که رشته عددهای

$$A , B , C , D , E , \ldots$$

مرتباً نزول می‌کند . ولی باتوجه بـه ارتباطی که بین کسرهای مسلسل (که قبلاً از آنها صحبت کردیم ) وجود دارد ، داریم :

$$\frac{B}{A}=\frac{m}{n+\frac{C}{B}} \Longrightarrow C=mA-nB,$$

$$\frac{C}{B}=\frac{m'}{n'+\frac{D}{C}} \Longrightarrow D=m'B-n'C,$$

$$\frac{D}{C}=\frac{m''}{n''+\frac{E}{D}} \Longrightarrow E=m''C-n''D$$

و غیره .

چون فرض را بر این قرار داده بودیم که دوعدد اولیهٔ A و B ، صحیح باشند ، نتیجه می‌شود که همهٔ بقیهٔ عددهای C ، D ، E و غیره هم عددهائی صحیح‌اند . به این ترتیب به این تناقض برخورد می کنیم که رشتهٔ بی‌نهایت عددهای نزولی A ، B ، C ، D ، E ، ...باید فقط ازعددهای صحیح تشکیل شده باشد ؛ ضمناً هیچیك از عددهای A ، B ، C ، D ، E ، ... هم نمی‌توانند مساوی صفر شوند ، زیرا کسرما تا بی‌نهایت ادامه دارد و عبارتهای $\frac{B}{A}$ ، $\frac{C}{B}$ ، $\frac{D}{C}$ وغیره هم باید همیشه مقدارمعینی باشند . به این ترتیب فرض ما ، که مقـدار کسر مسلسل مفروض مساوی عددگویای $\frac{B}{A}$ است ، درست نیست و الزاماً مقدار آن

عددی است گنگ» .

سپس لژاندر ثابت کرد که کسر مسلسل گنگ است ، وقتی که $\frac{m}{n}$ ، $\frac{m'}{n'}$ وغیره کوچکتر از واحد باشند .

با توجه به نوع بسط $e$ و $e^۲$ بـه صورت کسرهـای مسلسل ، می‌توان نتیجه گرفت که آنهـا نمی‌توانند ریشه‌های معادلات جبری با ضرایب گـویا باشند . این نتیجه گیری را لیوویل (۱۸۰۹ - ۱۸۸۲) ریاضی‌دان فرانسوی درسال ۱۸۴۰ بدست آورد . او ثابت کرد که $e$ و $e^۲$ نمی‌توانند ریشه‌های معادلهٔ

$$ax^۲+bx+c=۰$$

باشند ($a$ ، $b$ و $c$ عددهای صحیح هستند ).

اثبات گنگ بودن عدد $e$ ، به طریقی که معمولاً در بحثهای آنالیز ریاضی داده می‌شود ، متعلق بـه فوریه ( ۱۷۶۸ - ۱۸۳۰ ) ریاضی‌دان فرانسوی است . این اثبات را می‌آوریم .

گنگ بودن عدد $e$ ، مستقیماً از رشتهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$e=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots$$

اگر فرض کنیم $e=\frac{p}{q}$ باشد( $p$ و $q$ رانسبت بهم اول می‌گیریم) ، در آن صورت تساوی زیر بدست می‌آید :

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{(q+1)!}+\cdots$$

طرفین این تساوی را در $q!$ ضرب می‌کنیم، می‌شود:

$$p(q-1)!=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)q!+$$

$$+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots$$

سمت چپ این تساوی عـددی مثبت و صحیح و مخالف صفر بدست می‌آید و در سمت راست عدد صحیح

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)q!$$

و رشتهٔ

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots$$

واضح است که مجموع جمله‌های رشتهٔ اخیر از $\frac{1}{q}$، که‌مجموع جمله‌های رشتهٔ زیر است، کوچکتر است:

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\cdots$$

ولی تفاضل دو عدد صحیح نمی‌توانـد مساوی عددی مخالف صفر و کوچکتر از $\frac{1}{q}$ باشد، وبنابراین $e\neq\frac{p}{q}$ است.

باتغییر شکل این استدلال و بکار بردن آن در مورد رشتهٔ

$$e^{x} = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^{۲}}{۲!} + \cdots + \frac{x^{n}}{n!} + \cdots,$$

می‌توان بسادگی ثابت کــرد که اگر $x$ عددی گویا باشد ، $e^{x}$ عددی است گنگ .

حالا به اثبات این حکم ، به طریقی که شارل هرمیت ( ۱۸۲۲ – ۱۹۰۱) ریاضی‌دان فرانسوی آورده است ، می‌پردازیم .

ابتدا فرض می‌کنیم :

$$F(x) = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^{۲}}{۲!} + \cdots + \frac{x^{n-۱}}{(n-۱)!}$$

بنابراین داریم :

$$\frac{e^{x} - F(x)}{x^{n}} = \frac{۱}{n!}\left[۱ + \frac{x}{n+۱} + \frac{x^{۲}}{(n+۱)(n+۲)} + \cdots\right]$$

اگراز طرفین این تساوی ، مشتق مرتبهٔ $(n-۱)$ ام بگیریم ، بـه رابطهٔ زیر می‌رسیم :

$$\frac{e^{x}\pi(x) - \Phi(x)}{x^{۲n-۱}} = \frac{۱}{n!}\sum_{(m=۰,۱,۲,\ldots)} \frac{(m+۱)(m+۲)\cdots(m+n-۱)}{(n+۱)(n+۲)\cdots(۲n+m-۱)}x^{m},$$

که در آن $\pi(x)$ کثیرالجملــه‌ای با ضرایب صحیح و از درجهٔ $n-۱$ است ، یعنی

$$\pi(x)=x^{n-1}-n(n-1)x^{n-2}+$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2!}x^{n-3}+\cdots$$

و $\Phi(x)=\pi(-x)$.

فرض می‌کنیم

$$S=\Sigma\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{(n+1)(n+2)\cdots(2n+m-1)}x^{m}$$

بدست می‌آید

$$e^{x}\pi(x)-\Phi(x)=\frac{Sx^{2n-1}}{n!}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $x$ عددی صحیح باشد ، تابع‌نمائی $e^x$ نمی‌تواند عددی گویا باشد.

$e^x=\frac{B}{A}$ را درنظر می‌گیریم . به ازای مقادیر صحیح A و B ، این رابطه به صورت زیر در می‌آید :

$$B\pi(x)-A\Phi(x)=\frac{ASx^{2n-1}}{n!}$$

و این رابطه متناقض است : سمت چپ تساوی عددی صحیح است ، در حالی‌که سمت راست با بزرگ شدن n ، مقداری بسیار کوچک می‌شود .

رشتهٔ S دارای جملات مثبتی است ، بنابراین همیشه مخالف

صفر است و مقدار آن با بزرگ شدن n ، تنزل می‌کند. از طرف دیگر عامل $\frac{x^{2n-1}}{n!}$ حدی مساوی صفر دارد، که منجر به بیان غیرقابل قبولی برای عبارت می‌شود.

هرمیت سپس گنگ بودن عددهای π و $(\frac{\pi}{2})^2$ را هم ثابت می‌کند.

# ۲

# اثبات وجود عددهای متعالی به کمك کسرهای مسلسل

عدد x را جبری گویند (طبق اصطلاحی که کرونه‌کر ریاضی‌دان آلمانی بکار برد)، وقتی که درمعادلهٔ جبری به صورت

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

صدق کند، که در آن $a_0$ ، $a_1$ ، ... ، $a_n$ عددهای گویای صحیح در نظر گرفته شده‌اند.

اگر $a_0 = 1$ باشد، x را عدد جبری صحیح گویند. عددی که در معادلهٔ جبری (۱) صدق نکند، متعالی نامیده می‌شود.

اینگونه تقسیم عددها بـه دو دسته ، تنها وقتی ممکن است کـه قبلاوجودعددهای متعالی‌ثابت شده باشد. نخستین‌اثبات‌وجود این‌عددها را ای. لیوویل ، ریاضی‌دان فرانسوی ، درسال ۱۸۴۴ داده‌است . این اثبات را می‌آوریم .

قضیه‌ای راکه لیوویل ثابت می‌کند ، می‌توان به طریق زیرمنظم کرد : اگر کسر مسلسل معرف عدد جبری باشدکه در معادلهٔ غیر قابل تحویل * (۱) از درجهٔ $n$ $(n>1)$ صدق کند ، و اگر $q_m$ مخرج کسر متقارب $m$ام و $Q_{m+1}$ ، $(m+1)$ امین خارج قسمت ناقص بـاشد ، نسبت $\frac{Q_{m+1}}{q_m^{\,n-2}}$ با بزرگ‌شدن $m$ بطور نامحدود ، می‌تواند از عددکاملا معینی مانند $M$ کوچکتر باشد .

در حقیقت فرض‌کنید معادلهٔ

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1')$$

ریشهٔ ξ را داشته باشد که به وسیلهٔ کسر مسلسل بیان می‌شود . معادلهٔ (′۱) را بدون ریشه‌های گویا و مساوی بحساب می‌آوریم ، که همیشه ممکن است .

---

* ) معادلهٔبا ضرایب صحیح را غیرقابل تحویل‌گویند ، وقتی که طرف چپ‌آن را نتوان به صورت ضرب دوکثیرالجمله باضرایب صحیح تبدیل‌کرد .

تفاضل بین دو کسر متقارب و متوالی $\frac{p_m}{q_m}$ و $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ را در نظر می‌گیریم ، این تفاضل برابر است با :

$$\frac{p_m}{q_m}-\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}=\frac{\pm 1}{q_m q_{m+1}}$$

ریشهٔ $\xi$ بین دو کسر متقارب واقع است و بنابراین تفاضل

$$\frac{p_m}{q_m}-\xi=\frac{\varepsilon}{q_m q_{m+1}} \qquad (2)$$

($\varepsilon$ کسری کوچکتر از واحد است) کوچکتر یا بزرگتر از صفر خواهد بود.

اگر بقیهٔ ریشه‌های معادلهٔ ($1'$) را به $\xi_1$ ، $\xi_2$ ، $\cdots$ ، $\xi_{n-1}$ نشان دهیم ، بدست می‌آید :

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=(x-\xi)(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_{n-1})$$

از این اتحاد تفاضل $x-\xi$ را ، با تبدیل $x$ به $\frac{p_m}{q_m}$ ، معین می‌کنیم :

$$\frac{p_m}{q_m}-\xi=\frac{p_m^n+a_1p^{n-1}q+\cdots+a_nq_n^n}{q_m^n\left(\frac{p_m}{q_m}-\xi_1\right)\left(\frac{p_m}{q_m}-\xi_2\right)\cdots\left(\frac{p_m}{q_m}-\xi_{n-1}\right)}.$$

با توجه به اینکه $\frac{p_m}{q_m}-\xi=\frac{\varepsilon}{q_m q_{m+1}}$ است ، بدست می‌آید :

$$\frac{1}{q_m q_{m+1}}=\frac{p_m^n+a_1 p_m^{n-1} q_m+\cdots+a_m q_m^n}{\left(\varepsilon q_m \frac{p_m}{q_m}-\xi_1\right)\left(\frac{p_m}{q_m}-\xi_2\right)\cdots\left(\frac{p_m}{q_m}-\xi_{n-1}\right)} \qquad (۳)$$

باید متوجه بود که حاصلضرب دو جمله ایهای مخرج عددی حقیقی است ، کـه از تساوی بالا نتیجه می‌شود . با بزرگ شدن $m$ بطور نامحدود ، کسر $\frac{p_m}{q_m}$ به سمت حد $\xi$ میل می‌کند و حاصلضرب دوجمله‌ایهای مخرج به سمت حد :

$$(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{n-1})\neq 0 \qquad (۴)$$

بنابراین می‌توان درنظر گرفت‌که

$$|(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{n-1})|<M,$$

که در آن $M$ عدد مثبت دلخواهی است . بنابراین به ازای مقدار به اندازهٔ کافی بزرگ $m$ داریم :

$$\left|\left(\frac{p_m}{q_m}-\xi_1\right)\left(\frac{p_m}{q_m}-\xi_2\right)\cdots\left(\frac{p_m}{q_m}-\xi_{n-1}\right)\right|<M$$

مخرج کسر تساوی (۳) عددی صحیح و مخالف صفر است ، زیرا معادلهٔ (۱´) ریشهٔ گویا ندارد . بنابراین ، وقتی که m بــه اندازهٔ کافی بزرگ باشد داریم :

$$\frac{1}{q_m q_{m+1}} > \frac{1}{q_m^n M},$$

و از آنجا :

$$q_{m+1} < M q_m^{n-1} \quad \text{یا} \quad q_m Q_{m+1} < M q_m^{n-1}$$

و بالاخره :

$$\frac{Q_{m+1}}{q_m^{n-2}} < M \qquad (5)$$

حالا اگر چنان کسر مسلسلی بنویسیم ، که در آن تساوی ( ۵ ) برقرار نباشد ، چنین کسری یك عدد متعالی را بیان می کند .

عددهائی که در چنین کسر مسلسلی صدق نکنند ، به پیشنهاد مال، عددهای متعالی لیوویل نامیده شد . مثلاً کسر اعشاری زیر ازاینگونه عددهاست :

$$\omega = \frac{m_1}{10^1} + \frac{m_2}{10^{1\times 2}} + \frac{m_3}{10^{1\times 2\times 3}} + \dots + \frac{m_i}{10^{1\times 2\times 3\times \dots \times i}} + \\ + \dots \quad (m_i = 1, 2, \dots, 9)$$

کـه در آن تعداد صفرهای بین دو رقم متوالی مـرتباً زیاد و زیادتـر می‌شود . متذکر می‌شویم که ساده‌ترین اثبات قضیه ، متعلق به ریاضی‌دان شوروی آ . یـا . خین چین است .

نشانۀ متعالی بودن از نظر لیوویل کاملاً مشروط است . عددهای متعالی وجود دارد که دارای این نشانه نیستند و واضح است که برای کشف متعالی بودن آنها ، باید از روشهای جدیدی استفاده کرد .

# ۳

# اثبات وجود عددهای متعالی به‌کمك آنالیز

اثبات وجود عددهای متعالی را می‌توان به‌طریق دیگری هم انجام داد، که به هرحال بامطالعهٔ خواص‌عددهای خاصی نتیجه می‌شود که آنها نمی‌توانند در هیچ معادلهٔ جبری صدق کنند.

برای نخستین بار لیوویل از این روش استفاده کرد و ثابت‌کرد که عدد $e$ گنگ است و نمی‌تواند در یك معادلهٔ درجه دوم باضرایب گویا صدق کند. محتوی استدلال لیوویل چنین است:

فرض می‌کنیم که عدد $e$ در معادلهٔ زیر صدق کند

$$ae^{2}+be+c=0 \qquad (6)$$

که در آن $a>0$ و $c$، $b$، $a$ عددهای صحیحی هستند . اگر جمله‌های معادله را بر e تقسیم کنیم ، بدست می‌آید :

$$ae+b+ce^{-1}=0$$

از طرف دیگر داریم :

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots,$$

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots,$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$(n-1)!e=(n-1)!+2\times 3\cdots(n-1)+3\times 4\cdots(n-1)+$$
$$+\cdots+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+$$
$$+\cdots=\left[(n-1)!+2\times 3\cdots(n-1)+\cdots+1\right]+\frac{1}{n}\left[1+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right],$$
$$(n-1)!e^{-1}=\left[(n-1)!-2\times 3\cdots(n-1)+3\times 4\cdots\right.$$
$$\left.(n-1)-\cdots\right]+\frac{(-1)^{n}}{n}\left[1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\cdots\right].$$

مجموع عددهای صحیح واقع در پرانتزهای اول را $Q_1$ و $Q_2$ و عبارتهای داخل پرانتزهای دوم را $R_1$ و $R_2$ می‌نامیم . در این‌صورت داریم :

$$\left.\begin{aligned} (n-1)!\,e &= Q_1 + \frac{R_1}{n}, \\ (n-1)!\,e^{-1} &= Q_2 + \frac{(-1)^n R_2}{n} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

می‌بینیم که

$$R_2 < 1,$$

$$R_1 < 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots = \frac{n+1}{n}$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که به ازای $n > 1$ داریم : $R_1 < 2$ .

حالا اگرطرفین معادلهٔ (۶) را در! $(n-1)$ ضرب کنیم وبه‌جای $(n-1)!e$ و $(n-1)!e^{-1}$ مقادیرشان را ازمعادلات (۷) قرار دهیم، بدست می آید :

$$\frac{aR_1 + (-1)^n cR_2}{n} + (aQ_1 + cQ_2 + b) = 0 \qquad (8)$$

عبارت دوم ، که درداخل پرانتز قرار گرفته است ، عددی است صحیح و عبارت اول کسری است که صورت آن با انتخاب متناسب مقدار مربوطهٔ n عددی است صحیح و مخالف صفر . در حقیقت

$aR_1 > 0$ است ولی $0 > (-1)^n cR_2$ است وقتی $c > 0$ و $n$ عـددی زوج یا $c < 0$ و $n$ عددی فرد باشد، بنابراین صورت کسر عددی مخالف صفر است . اگر $n$ را بطور نامحدود بزرگ کنیم ، صورت کسـر کوچکتر از $2a + (-1)^n c$ می‌ماند (این مطلب از اینجا نتیجه می‌شود که $R_1 < 2$ و $R_2 < 1$ بود) . به این ترتیب کسر

$$\frac{aR_1 + (-1)^n cR_2}{n}$$

در حالی که مخالف صفر باقی می‌ماند ، می‌تواند از هر عددی ، که از قبل معین شده است ، کوچکتر باشد . از اینجا نتیجه می‌شود که تساوی (۸) به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ $n$ ، ممکن نیست ، یعنی مجموع یك عـدد صحیح و یك کسر کوچکتر از واحـد نمی‌تـواند مساوی صفر شود .

بنابراین محتوی استدلال لیوویل چنین است : فرض می‌کنیم رابطه‌ای وجـود داشته باشد ، و ما می‌خواهیم عدم امکان آن را ثابت کنیم . سپس هریك از جمله‌های گویای آن را بر حسب مقادیر تقریبی گویا بیان می‌کنیم :

$$\omega_i = \frac{M_i + \varepsilon_i}{M} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (۹)$$

که در آن $M_i$ عددی صحیح و $\frac{\varepsilon_i}{M}$ کسر بسیار کوچکی است .

دوطرف تساوی (۹) را در $M$ ضرب و $M\omega_i$ را بـه $M_i+\varepsilon_i$ تغییر می دهیم ، به این ترتیب آن را به دوقسمت کرده‌ایم که یکی از آنها عددی صحیح و دیگری کسری کوچکتر از واحد است . بنابراین به تناقض رسیده‌ایم :مجموع عدد صحیح مخالف صفر و کسر کوچکتر از واحد مخالف واحد ، نمی‌تواند مساوی صفر شود .

عدد گنگ $\omega_i$ را ، با مفروضات لیوویل ، به دو طریق می‌توان بسط داد :

۱) به کمك کسر مسلسل ، زیرا تساوی

$$\frac{p_m}{q_m}-\xi=\frac{\varepsilon}{q_m q_{m+1}}$$

می‌تواند به صورت زیر درآید :

$$\xi=\frac{p_m}{q_m}+\frac{\eta_m}{q_m}$$

که در آن $\eta_m=-\frac{\varepsilon}{q_{m+1}}$ است .

۲) استفاده از خواص رشته‌هائی ، که به کمك آنها این عددها بیان می‌شوند .

از این روش هرمیت استفاده کرد و متعالی بودن عدد e را ثابت

کرد . او دراین باره می‌نویسد که لازم است ثابت کرد که تساوی به‌صورت :

$$Ne^{n}+N_{1}e^{n-1}+N_{2}e^{n-2}+\cdots+N_{n}=0,$$

که در آن ضرایب $N$ ، $N_1$ ، $N_2$ ، ... ، $N_n$ و $n$ عددهای صحیح هستند ، ممکن نیست .

ولی هرمیت مسئله را کلی‌تر طرح می‌کند ، یعنی ثابت می‌کند که تساوی

$$N+N_{1}e^{a}+N_{2}e^{b}+\cdots+N_{n}e^{h}=0 \qquad (10)$$

که در آن $N\neq 0$ ، ضرایب $N_1$ ، $N_2$ ، ... ، $N_n$ عددهائی صحیح و توانهای $a$ ، $b$ ، ... ، $h$ عددهای صحیح متمایز و مخالف صفرند ، منجر به تناقض می‌شود .

هرمیت برای اینکه این وضع را ثابت کند $e^{a}$ ، $e^{b}$ ، ... ، $e^{h}$ را به این ترتیب بیان می‌کند :

$$e^{a}=\frac{M_{a}+\varepsilon_{a}}{M},\ e^{b}=\frac{M_{b}+\varepsilon_{b}}{M},\ldots,$$

$$e^{h}=\frac{M_{h}+\varepsilon_{h}}{M}$$

سپس تساوی (۱۰) را در $M$ ضرب می‌کند و به‌جای $Me^{a}$ ، $Me^{b}$ ،

... ، $Me^{h}$ ، مقادیرمتناظر آنها $M_a+\varepsilon_a$،$M_b+\varepsilon_b$ ، ... ، $M_h+\varepsilon_h$
را قرارمی‌دهد و به‌کمك روش لیوویل ثابت می‌کند که باانتخاب مقدار متناسبی برای M ، سمت چپ تساوی نمی‌تواند مساوی صفر شود .

بنابراین ، مشکل اصلی مربوط به پیداکردن عدد M و عددهای متناظر $M_a$ ، $M_b$ ، ... ، $M_h$ و $\varepsilon_a$ ، $\varepsilon_b$ ، ... ، $\varepsilon_h$ بـود . هرمیت این عددها را به کمك انتگرالهای معین بیان می‌کند .

بر مأخذ این انتگرالهای معین وبکاربردن همان روشی که مورد استفادهٔ هرمیت بود ، لیندمان (۱۸۵۲ - ۱۹۳۹) ریاضی‌دان آلمانی در سال ۱۸۸۲ مسئلهٔ مربوط به تربیع دایره را حل کرد ، مسئله‌ای که در جریان بیش از هزار سال موفق به حل آن نشده بودند ؛ لیندمان بطور دقیقی متعالی بودن عدد π را اثبات کرد .

لیندمان این نتیجه را با اثبات قضیه‌ای بدست آورد : اگر $\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ غیرقابل تحویلی باضرایب حقیقی یا مختلط صحیح باشد، در این صورت $e^{\alpha}$ نمی‌تواند عددی گویا باشد .

طبق رابطهٔ اولر $e^{\pi i}=-1$ ، یعنی مساوی عدد گویائی است وبنابراین $\pi i$ متعالی‌است ، ولی چون i عددی‌جبری است ، π متعالی خواهد بود . از اینجا نتیجه می‌شود که به‌کمك پرگار و خط‌کش و یا حتی به‌کمك هرگونه وسیله‌ای که منحنیها و سطوح جبری را رسم کند ، نمی‌توان مربعی معادل با یك دایره ساخت .

در سال ۱۸۸۵ ، وایرشتراس ( ۱۸۱۵ - ۱۸۹۷ ) ریاضی‌دان آلمانی اثبات ساده‌تری از متعالی بودن عدد $\pi$ داد . با توجه به اینکه $e^{\pi i} = -1$ است و بطور کلی $e^x$ تنها وقتی مساوی واحد منفی می‌شود که $x$ مضربی از $\pi i$ باشد ، وایرشتراس متعالی بودن عدد $\pi$ را به کمک حکم زیر ثابت می‌کند : اگر $x$ عددی جبری باشد ، مقدار $e^x+1$ همیشه مقداری مخالف صفر دارد .

متذکر می‌شویم که لیندمان حکم کلی‌تری را هم بیان کرده بود که محتوی آن چنین است : عبارت

$$A_0 e^{\alpha_0} + A_1 e^{\alpha_1} + \dots + A_n e^{\alpha_n}$$

نمی‌تواند مساوی صفر باشد ، بشرطی که ضرایب $A_0$ ، $A_1$ ، ... ، $A_n$ عددهای صحیح مخالف صفر و توانهای $\alpha_0$ ، $\alpha_1$ ، ... ، $\alpha_n$ عددهای مختلف جبری باشند . لیندمان اثبات مفصل این حکم را نمی‌دهد ، علاوه بر آن ثابت نمی‌کند که ضریب $c_0$ ، بعد از تبدیل مساوی صفر نمی‌شود .

اثبات این قضیه را وایرشتراس می‌دهد . ازاین قضیه می‌توان به عنوان حالت خاص، متعالی بودن عددهای $e$ و $\pi$ را باهم نتیجه‌گرفت. حالت خاصی ازقضیه ،که لیندمان بیان کرده است ،جالب است ، وقتی که $n=2$، $A_0=-1$، $\alpha_1=0$، $\alpha_0=\alpha$ و $A_1=A$ باشد. دراین‌صورت

بدست می آید که تساوی $A = e^{\alpha}$ ، در حالتی که $\alpha \neq 0$ و $A$ عددی جبری است ، غیر ممکن است .

به این ترتیب به تعمیم قضیهٔ لامبرت می‌رسیم ، یعنی : وقتی‌که $\alpha$ عددی‌جبری و مخالف صفر باشد ، تابع نمائی $e^{\alpha}$ همیشه مساوی یك عدد متعالی است ؛ لگاریتم طبیعی عدد جبری $A$ (بشرطی که مساوی واحد نباشد) ، همیشه عددی متعالی است .

برای اثبات ازبرهان خلف استفاده می‌کنیم،یعنی فرض می‌کنیم $\ln A = \alpha$ و $\alpha$ عددی جبری باشد . از اینجا بدست می‌آید $A = e^{\alpha}$ یا $e^{\alpha} - Ae^{\circ} = 0$ ، یعنی به حالت خاص قضیهٔ لیندمان می‌رسیم .

از قضیهٔ اول نتیجه می‌شود که منحنی نمائی $y = e^{x}$ ، بجز نقطهٔ $x = 0$، $y = 1$ ، شامل هیچ نقطهٔ جبری نیست . این قضیه‌ها ، ارتباطی راکه بین عمل لگاریتم‌گرفتن و آموزش عددهای متعالی وجود دارد ، ثابت می‌کنند .

وایرشتراس‌علاوه براین متذکر می‌شودکه از قضیهٔ‌کلی لیندمان می‌توان متعالی بودن $\sin\alpha$ را هم نتیجه گرفت ، بشرطی‌که $\alpha$ عددی جبری باشد .

می‌بینیم که‌اثبات هرمیت و لیندمان به‌وسیلهٔ وایرشتراس به‌صورتی ساده‌تر و قابل فهم‌تر بیان شده است .

در سال ۱۸۹۳، هیلبرت (۱۸۶۲-۱۹۴۳) ریاضی‌دان آلمانی اثر

کوچکی منتشر کرد که حاوی اثبات جدیدی از قضایای هرمیت و لیندمان بود . اثبات هیلبرت و هرمیت یکی بود ، که با ساده‌کردن آن هیلبرت توانست برای انتخاب عامل $M$ راهی پیدا کند ، یعنی :

$$M=\frac{1}{p!}\int_{0}^{\infty} z^{p}\left[(z-1)(z-2)\cdots(z-n)\right]^{p+1} e^{-z}dz,$$

که در آن $p$ عددی است اول که در شرط معینی صدق می‌کند ، و $n$ توان معادلهٔ مفروض است .

سپس هیلبرت جمله‌ها را به قسمتهای صحیح و کسری تقسیم می‌کند . استدلال او ، به‌خاطر سادگیش ، به همهٔ انواع قبل از آن برتری دارد .

گورویتس (۱۸۵۹ - ۱۹۱۹) ریاضی‌دان آلمانی اثبات هیلبرت را هم ساده‌تر کرد ، او متذکر شد که انتگرال هیلبرت نقش اصلی ندارد و می‌توان آن را کنار گذاشت . در حقیقت گورویتس از رابطهٔ نموهای محدود لاگرانژ استفاده می‌کند .

اثبات متعالی بودن عدد $e$ را ، بطریقی که گورویتس داده است، می‌آوریم .

به کمك رابطهٔ

$$e^{x}F(0)=F(x)+e^{x}\int_{0}^{x}e^{-x}f(x)dx \qquad (11)$$

که در آن $f(x)$ تابع صحیح دلخواهی است از درجهٔ $\gamma$ و

$$F(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(\gamma)}(x) \qquad (۱۲)$$

بسادگی عدم امکان تساوی زیر ثابت می شود :

$$c_0+c_1e+c_2e^2+\cdots+c_ne^n=0 \qquad (۱۳)$$

که در آن $n$ عدد دلخواه صحیح و مثبت و $c_0$ ، $c_1$ ، $c_2$ ، ... ، $c_n$ عددهای صحیح دلخواهی هستند ، ضمناً می‌توان $c_0$ را مخالف صفر بحساب آورد .

اگر در رابطهٔ (۱۱) به‌جای $x$ به‌ترتیب عـددهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ... ، $n$ را قرار دهیم و تساویهای بدست آمـده را بـه ترتیب در $c_0$ ، $c_1$ ، ... ،$c_n$ ضرب کنیم و سپس همه را با هم جمع نمائیم ، بدست می‌آید :

$$(c_0+c_1e+c_2e^2+\cdots+c_ne^n)\cdot F(0)=\sum_{k=0}^{n}c_kF(k)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}c_ke^k\int_0^k e^{-x}f(x)dx$$

اگر فرض کنیم که رابطهٔ (۱۳) وجود دارد ، بدست می‌آید :

$$0=\sum_{k=0}^{n} c_k F(k) + \sum_{k=1}^{n} c_k e^k \int_0^k e^{-x} f(x)dx \quad (۱۴)$$

این رابطه باید به ازای هر تابع دلخواه وصحیح $f(x)$ برقرار باشد ، و ما می‌بینیم که می‌توان تابع $f(x)$ را چنان انتخاب کرد که عدم امکان رابطهٔ (۱۴) واضح باشد . در این صورت ضمناً عدم امکان رابطهٔ (۱۳) هم ثابت می‌شود ، زیرا (۱۴) نتیجهٔ لازم (۱۳) است.

فرض می کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-n)^p \quad (۱۵)$$

که در آن $p$ عددی است اول و به اندازه‌ای که بخواهیم بـزرگ . ثابت می کنیم کـه بـه ازای $p>n$ و $p>|c_0|$ جملـهٔ اول از تساوی (۱۴) ، یعنی :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k F(k)$$

عددی است صحیح ومخالف صفر و جملهٔ دوم ، یعنی

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^k \int_0^k e^{-x} f(x)dx$$

به ازای مقدار به اندازهٔ کافی بزرگ $p$ ، از لحاظ قدر مطلق ، هر قدر

که بخواهیم ، کوچك می‌شود . در این‌صورت عـدم امکان تساوی (۱۴) واضح می‌شود .

متذکرمی‌شویم که تابع $f(x)$ می‌تواند به صورت کثیرالجمله‌ای باشد برحسب قوای صعودی $x$ ویا به صورت کثیرالجمله‌ای برحسب قوای صعودی $(x-k)$ ، که در آن $k$ یکی از عددهای ۱ ، ۲ ، ... ، $n$ می‌باشد .

در حالت اول چنین است :

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}\left(Ax^{p-1}+Bx^{p}+Cx^{p+1}+\cdots\right) \quad (۱۶)$$

و درحالت دوم :

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}\left(B_k(x-k)^{p}+C_k(x-k)^{p+1}+\cdots\right) \quad (۱۷)$$

ضمناً ، همانطورکه از عبارت (۱۵) دیده می‌شود ، تمام ضرایب $A$ ، $B$ ، $C$ ، ... ، $B_k$ ، $C_k$ ، ... عددهای صحیح هستند .

باید توجه داشت که $A$ بر $p$ قابل قسمت نیست ، بشرطی کـه $p$ عددی اول و بزرگتر از $n$ باشد . در حقیقت ، ازرابطهٔ (۱۵) دیده می‌شودکه $A=(n!)^{p}$ و در حالتی که $p$ اول و بزرگتر از $n$ باشد ، $A$ بر $p$ قابل قسمت نیست .

از روابط (۱۶) و (۱۷) روشن است که

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(p-2)}(0)=0;f^{(p-1)}(0)=A;$$

$$f^{(p)}(0)=Bp;f^{(p+1)}(0)=Cp(p+1);\cdots;$$

$$f(k)=f'(k)=\cdots=f^{(p-1)}(k)=0;$$

$$f^{(p)}(k)=B_k\,p;f^{(p+1)}(k)=C_k\,p(p+1);\cdots,$$

و از اینجا ، با در نظر گرفتن رابطهٔ (۱۲) ، نتیجه می‌شود که

$$F(0)=A+Bp+Cp(p+1)+\cdots$$

عددی است صحیح وغیر قابل قسمت بر $p$ ، ولی

$$F(k)=B_k\,p+C_k\,p(p+1)+\cdots$$

به ازای $k=1,2,3,\ldots,n$ عـددی است صحیح و قابل قسمت بـر $p$ . بنابراین

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\,F(k)=c_0F(0)+c_1F(1)+\cdots+c_nF(n),$$

وقتی که $p$ عددی اول و بزرگتر از $|c_0|$ باشد ، عددی است صحیح و غیر قابل قسمت بر $p$ ، زیرا همهٔ جمله‌های این مجموع به استثنای اولی بر $p$ قابل قسمت است . بنابراین به صحت قضاوت خود دربارهٔ این مجموع متقاعد می‌شویم .

مجموع دوم را در تساوی (۱۴) مـورد مطالعه قرار می‌دهیم ، نامساوی

$$\left| e^{-x} f(x) \right| < \frac{n^{p-1} n^{p} \cdots n^{p}}{(p-1)!} = \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}$$

را درنظرمی‌گیریم که ازعبارت (۱۵) برای $f(x)$ ، به ازای همهٔ مقادیر $x$ بین صفر و $n$ نتیجه می‌شود ، و از آن نامساوی $e^{-x} \leqslant 1$ به ازای $0 < x < n$ . سپس بدست می‌آوریم :

$$\left| \int_0^k e^{-x} f(x)dx \right| < \frac{kn^{(n+1)p-1}}{(p-1)!},$$

زیرا انتگرال را می‌توان به عنوان یك مجموع در نظر گرفت و کالبد (مدول) مجموع ازمجموع کالبدهای جمله‌ها ، بزرگتر نیست . برهمین اساس معلوم می‌شود :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^k \int_0^k e^{-x} f(x)dx \right| <$$

$$< \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{n} k|c_k| e^k ,$$

که از آنجا نتیجه می‌شود که به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ $p$ ، مجموع مورد مطالعه ، به‌هراندازه که بخواهیم کوچك است ، زیرا

$$\frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}=\frac{n^{(n+1)(p-1)}}{(p-1)!}n^{n}=\frac{z^{p-1}}{(p-1)!}n^{n},$$

که در آن $z=n^{n+1}$ و $\frac{z^{p-1}}{(p-1)!}$ ، وقتی‌که $p$ به‌سمت $\infty$ میل‌کند ،

به سمت صفر میل می‌کند ($z$ مقدار ثابتی است) .

به این ترتیب ، آنچه‌که قبلاً در بارهٔ مجموع دوم تساوی (۱۴) گفتیم ، ثابت شد که همراه با آن عدم امکان روابط (۱۴) و (۱۳) هم ثابت می‌شود .

هوردان ریاضی‌دان آلمانی ، استدلال گورویتس را از محاسبهٔ دیفرانسیلی جدا کرد . کار هوردان بر یك نوع استدلال مقدماتی تکیه دارد ، که به کمك روشهای سنگین تبدیلات صوری ، روش محاسبهٔ دیفرانسیلی را دورمی‌زند . هوردان ناچار شد توابع ساختگی و همراه با آن علامتهای بغرنجی را بوجود آورد ، ولی از آنجا که این استدلال برای کسانی که با محاسبات دیفرانسیل و انتگرال آشنا نیستند ، قابل فهم است ، توانست بطور وسیعی انتشار پیدا کند .

درسال ۱۹۰۰ ، والن اطلاع داد که بادقت روی استدلال هیلبرت

توانسته است حکم هیلبرت را (دربارهٔ متعالی بودن عدد π ) به طریق حسابی ـ جبری اثبات کند . اثبات او بر مقدماتی ترین ملاحظات (نظریهٔ رشته‌ها) وبدون استفاده ازعلامتهای هوردان تکیه داشت. اثبات والن به‌مراتب مقدماتی‌تر و ساده‌تر از اثبات هولدن است .

# ۴

## اثبات وجود عدد های متعالی

## به کمك نظریهٔ مجموعه‌ها

هردو روشی که برای اثبات وجودعددهای متعالی مورد بررسی قرار دادیم ، چه از نظر تعمیم و چه از نظر اهمیت نظری ، جای خود را به روش ژرژکانتور (۱۸۴۵ - ۱۹۱۸) ، ریاضی دان آلمانی دادند ، که بر اساس نظریهٔ مجموعه‌ها قرار داشت . از نظـر کانتور ، وجود عددهای متعالی ناشی‌از قضیهٔ قابل شمار بودن مجموعهٔ عددهای جبری و غیر قابل شمار بودن مجموعـهٔ عددهای حقیقی است . قبل از آنکه به اثبات این قضیه بپردازیم ، به توضیح بعضی از مفاهیم جدیدی کـه

کانتور بکار می‌برد ، می پردازیم .

از نظر کانتور ، مجموعه عبارت است از دسته یا گروهی که از تعداد محدود یا نا محدود اشیاء (که عناصر مجموعه نامیده می‌شوند)، تشکیل شده باشد .

ما فقط مجموعه‌هائی را در نظر می‌گیریم که عناصر آنها ، عددهای حقیقی و با کمیت نامحدود ، باشد . کانتور چنین مجموعه‌ای را وقتی قابل شمار می‌داند که هر یك از عناصر آن بتواند متناظر با عنصری ازمجموعهٔ عددهای طبیعی باشد وضمناً هرعنصر از مجموعهٔ عددهای طبیعی متناظر با بیش ازیك عنصراز مجموعهٔ مفروض نباشد . مجموعهٔ عددهای زوج مثبت ، مثالی برای مجموعهٔ قابل شمار است ، زیرا می‌توان آنها را ازقبل شماره‌گذاری کرد . مجموعهٔ عددهای گویا هم ، مجموعه‌ای قابل شمار است .

حالا به اثبات قضیه‌ها می‌پردازیم .

**قضیهٔ اول :** مجموعهٔ عددهای جبری ، مجموعه‌ای قابل شمار است .

برای اینکه این قضیه را ثابت کنیم ، باید ریشه‌های حقیقی همهٔ معادلات جبری به صورت زیر را ، با ردیف معینی تنظیم کنیم .

$$c_0x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n=0,$$

که‌در آن $c_0>0$، عددهای، $c_0$،$c_1$ ، $c_2$ ، ...، $c_n$ نسبت به‌هم‌اول‌ومعادله غیرقابل تحویل است .

معادلات را برحسب مقادیر به اصطلاح « ارتفاع $H$ » ، کـه به‌ترتیب زیرمعین می‌شود ، تقسیم می‌کنیم :

$$H=n-1+|c_0|+|c_1|+\cdots+|c_n|$$

سپس عددهائی را ، که متناظر با یك ارتفاع $H$ هستند ، بـر حسب مقادیرشان منظم می‌کنیم .

روشن است که هر ارتفاع معین $H$ متناظر با تعداد معینی‌معادلهٔ جبری ، و بنابراین تعداد معینی عدد جبری است .

مثلاً برای $H=1$ ، فقط $n=1$، $|c_0|=1$، $|c_1|=|c_2|=\dots=0$ می‌گیریم که معادلهٔ $x=0$ را می‌دهد . اگر $H=2$ باشد ، یا $n=1$، $|c_0|=2$ ، $|c_1|=|c_2|=\dots=0$ می‌شودکه همان معادلهٔ $x=0$ را می‌دهد و یا $n=1$ ، $|c_0|=1$ ، $|c_1|=1$ ، $|c_2|=\dots=0$ یعنی $x\pm1=0$ و یا $n=2$ ، $|c_0|=1$ ، $|c_1|=\dots=0$ یعنی $x^2=0$ بدست می‌آید. اگر $H=3$ باشد ، یا $n=1$ ، $|c_0|=3$ ، $|c_1|=\dots=0$ یعنی $3x=0$ ، یـا $n=1$ ، $|c_0|=2$ ، $|c_1|=1$ ، $|c_2|=\dots=0$ یعنـی $2x\pm1=0$، یا $n=1$، $|c_0|=1$، $|c_1|=2$، $|c_2|=\dots=0$ یعنی $x\pm2=0$، یا $n=2$ ، $|c_0|=2$ ، $|c_1|=\dots=0$ یعنی $2x^2=0$ بدست می‌آید .

چه در عبارت اخیر و چه در بقیهٔ عبارتهائی که برای $H=۳$ بدست می‌آید ، به معادله و یا عدد جدیدی برخورد نمی کنیم .

اگر $H=۴$ باشد ، تنها معادلات جدید زیر بدست می‌آید :

$$۳x \pm ۱ = ۰,\ x \pm ۳ = ۰,\ ۲x^{۲} - ۱ = ۰,$$
$$x^{۲} + x + ۱ = ۰,\ x^{۲} - x + ۱ = ۰,\ x^{۲} - ۲ = ۰$$

اگر از ریشه‌های این معادلات ، نسبت به مقادیر H ، دنباله‌ای تشکیل دهیم ، جدول زیر بدست می آید :

| H | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| | ۰ | $-۱ ; +۱$ | $-۲ ; -\frac{۱}{۲} ; \frac{۱}{۲} ; ۲$ | $-۳ ; -۱,۶۱۸۰۳... ; -۱,۴۱۲۴۱...$ |

چون این روش‌را می‌توان برای همهٔ مقادیرصحیح H بکاربرد، اگر چه H بزرگ هم باشد ، روشن است که همهٔ عددهای جبری (حقیقی) را می‌توان به صورت دنباله‌ای در آورد و واضح است که این دنباله بادنبالهٔ عددهای صحیح مثبت معادل است .

به این ترتیب ، مجموعهٔ عددهای جبری مجموعه‌ای قابل شمار است .

**قضیهٔ دوم : مجموعهٔ عددهای حقیقی ، مجموعه‌ای غیر قابل شمار است .**

مثلاً همهٔ عددهای واقع در فاصلهٔ بستهٔ [ ۰,۱ ] را در نظر می‌گیریم . فرض می‌کنیم که مجموعهٔ این عددها قابل شمار باشد . این عددها را منظم می‌کنیم :

$$a_۱ , a_۲ , a_۳ , \cdots , a_n , \cdots \qquad (۱۸)$$

بنحوی که هر یك از آنها جای کاملاً مشخصی را در این دنباله پر کرده باشد . هریك ازجمله‌های این دنباله را به صورت کسر اعشاری نامحدود در نظر می‌گیریم . اگر یکی از عددهای a به صورت کسر اعشاری تحقیقی باشد ، مثل ۰,۲۳ ، چنین کسری را می‌توان به دو طریق به صورت کسر اعشاری نامحدود نشان داد : ۱) به صورت کسر اعشاری نامحدود با دورهٔ تناوب صفر، یعنی ...۰,۲۳۰۰۰۰ = ۰,۲۳؛ ۲) به‌صورت کسر اعشاری نامحدود با دورهٔ تناوب ۹ ، یعنی به‌صورت ... ۰,۲۲۹۹۹ = ۰,۲۳ . حالا دو کسر اعشاری تحقیقی ، مثل ۰,۳۵ و ۰,۳۶ در نظر می‌گیریم ،که تنها دررقم دوم اختلاف داشته باشند و ضمناً بین ۰ و ۱ واقع باشند . به این ترتیب

$$۰ < ۰,۳۵ < ۰,۳۶ < ۱$$

سپس کسر اعشاری نامحدود زیررا تشکیل می‌دهیم :

$$۰,۳۵b_۳b_۴b_۵ \cdots b_n \cdots ,$$

که‌در آن $b_۳$، $b_۴$، ...، $b_n$ ، ... دنبالهٔ رقمهای اعشاری از رقم سوم به بعد هستند . موقعیت این کسر چنین است :

$$0 < 0,35 < 0,35b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots < 0,36 < 1$$

حالا فرض می‌کنیم $b_3$ با رقم سوم اعشار عدد $a_1$ از دنبالهٔ(۱۸) فرق داشته باشد ، به‌همین ترتیب $b_4$ بارقم چهارم اعشار عدد $a_2$ و غیره . بطور کلی رقم $b_n$ را چنان می‌گیریم که با رقم nام اعشار عدد $a_{n-2}$ از دنبالهٔ (۱۸) اختلاف داشته باشد . به این ترتیب کسر نامحدود مشخصی بدست می‌آید که در فاصلهٔ ۰ و ۱ قرار دارد ، ولی جزو مجموعهٔ a نیست . در حقیقت اگر برعکس فرض کنیم که کسر $0,35b_3b_4\cdots b_n\cdots$ جای معینی از دنبالهٔ (۱۸) ، و مثلاً ردیف nام ، را گرفته باشد ، به تناقض برمی‌خوریم ، زیرا رقم $(n+2)$ ام اعشار از کسرما با رقم $(n+2)$ ام عدد $a_n$ فرق دارد .

محدودیتی که دراینجا قائل شدیم و فاصلهٔ عددی را بین ۰ و ۱ درنظرگرفتیم، نقش اساسی‌ندارد . مثلاً به‌کمک‌تابع $y=\frac{1}{x}$ فاصلهٔ نیم باز [۱ ، ۰) برای x به‌فاصلهٔ نیم‌بستهٔ (∞ و۱] برای y تبدیل می‌شود.

از دو قضیهٔ کانتور نتیجه می‌شود که مجموعهٔ غیر قابل شمار عددهای متعالی حقیقی وجود دارد . زیرا طبق قضیهٔ اول کانتور ، مجموعهٔ عددهای جبری قابل شمارو طبق قضیهٔ دوم ، مجموعهٔ عددهای حقیقی غیر قابل شمارند .

به‌این‌ترتیب‌ثابت می‌شود که نه‌تنهاعددهای متعالی وجود دارند، بلکه غیر قابل شمار هم هستند . از مجموعهٔ عددهای متعالی می توان

مجموعهٔ عددهائی را جدا کرد که به عددهای مشهوری مثل $e$ ، $\pi$ ، $\ln\alpha$ ( $\alpha$ عددی است جبری ) و غیره مربوطاند . این عددها را، عددهای متعالی خاص گویند .

می‌توان ثابت کرد که مجموعهٔ عددهای متعالی خاص ، مجموعه‌ای قابل شمار است . از اینجا نتیجه می‌شود که عددهای متعالی وجوددارندکه به‌این‌مجموعه مربوط‌نیستند وفوق متعالی نامیده می‌شوند. باید متذکرشدکه عددهای متعالی‌خاص ومخصوصاً عددهای فوق متعالی خیلی کم مورد بررسی قرار گرفته‌اند و مثلاً هنوز حتی یك عدد فوق متعالی هم پیدا نشده است .

# ۵

## تکامل بعدی

## نظریهٔ عددهای متعالی

مطالعهٔ عددهای متعالی به اینجا قطع نشد و ادامه پیدا کرد . در سال ۱۸۹۹ بورل ( ۱۸۷۱ - ۱۹۵۶ ) ریاضی‌دان فرانسوی در اثـر خود « دربارهٔ دورهٔ عدد متعالی e » تکانی به تکامل این نظریه داد . او حد پائین کالبد (مدول) P(e) را بدست آورد که فقط مربوط بـه ارتفاع H و درجهٔ n از کثیرالجملهٔ با ضرایب صحیح P(x) بود .

درسال ۱۹۲۳، موردوخای - بولتوسکی(۱۸۷۶-۱۹۵۲) ریاضی‌دان شوروی ، بدون اطلاع از کار های بورل ، به نامساوی شبیهی در

مورد حد پائین کثیرالجمله‌ای از e رسید . متذکر می‌شویم که مطالعات موردوخای‌بولتوسکی اولین کوشش درمورد ارتباط بین‌متغیر مختلط با عددهای متعالی بشمارمی‌رود. دانشمند ، علاوه بر آن طرحی برای تنظیم عددهای متعالی پیشنهاد کرد .

می‌دانیم که عددهای

$$e^{\alpha}, \ln\alpha, \sin\alpha, \ldots$$

وقتی که $\alpha$ عدد جبری باشد ، متعالی‌اند . موردوخای ـ بولتوسکی این عددها را مبانی مقدماتی ساختمان دسته اول می‌نامد . و عددهای

$$e^{\alpha}, \ln\alpha, \sin\alpha, \ldots$$

را، وقتی‌که $\alpha$ عدد متعالی از دستهٔ اول باشد ، مبانی دستهٔ دوم‌می‌نامد.

بعد ازبررسیهای هرمیت و لیندمان، موفقیت جدی درپیشرفت این نظریه‌بدست‌نیامد، بجز بعضی‌تسهیلاتی که به‌وسیلهٔ مارکووی، ویرشتراس، هیلبرت ، گورویتس، هوردان ، والن وهمچنین آثار بورل و موردوخای‌ـ بولتوسکی در اثبات قضایای هرمیت و لیندمان بوجود آمد .

در سال ۱۹۰۰، هیلبرت گزارشی از مسائل مربوط به آیندهٔ ریاضیات ، به کنگرهٔ دوم بین‌المللی ریاضی‌که در پاریس تشکیل شده بود، داد . هفتمین مسئله ( از بیست و سه مسئله ) از گزارش هیلبرت چنین بود (باید متذکر شد که قبل‌از هیلبرت، اولر درسال ۱۷۴۸، این مسئله را ، منتهی به صورت کاملاً خاص ، مطرح کرده بود ) : آیا

عددهائی به صورت $\alpha^{\beta}$ وجود دارند ، که اگر $\alpha$ عددی جبری غیراز ۰ و۱، و$\beta$ عددی جبری وگنگ باشد ـ مثل $۲^{\sqrt{۲}}$ یا $(-۱)^{-i} = e^{\pi}$ ، ـ عددهای متعالی یا لااقل عددهای گنگ باشند ؟

بسیاری ازسؤالهای هیلبرت خیلی زود حل شد ، ولی مسئلهٔ اولر ـ هیلبرت در جریان ۳۰ سال برای حل باقی ماند . تنها در سال ۱۹۲۹ ، آ. اُ. هلفوند ریاضی‌دان شوروی حالت خاصی از این مسئله را حل کرد و ثابت کرد که عدد $\alpha^{i\sqrt{p}}$ ، که در آن $\alpha$ عددی‌جبری غیراز ۰ و۱ و $p>۰$ عدد صحیح گویا وغیرمربع کامل باشد ، همیشه عددی متعالی است .

درسال۱۹۳۰، ر. اُ. کوزمین (۱۸۹۱–۱۹۴۹) ریاضی‌دان دیگر شوروی ، روش هلفوند را ، با مختصر اختلافی ، برای حالت نمای حقیقی بکار برد و ثابت کرد که عدد $\alpha^{\sqrt{p}}$ ، که در آن $\alpha$ عددی جبری غیر از ۰ و ۱ و $p>۰$ عدد صحیح گویا و غیرمربع‌کامل‌باشد ، عددی است متعالی. درحالت‌خاص او ثابت کرد که‌عدد $۲^{\sqrt{۲}}$ عددی‌متعالی‌است.

زیگل ریاضی‌دان آلمانی هم در سال ۱۹۳۰ ثابت کرد : ثابتهائی که درتوابع هذلولی، نقش‌عدد $\pi$ را درتوابع مثلثاتی‌دارند، عددهائی متعالی هستند .

بالاخره در سال ۱۹۳۴ ، هلفوند موفق شد مسئلهٔ اولر ـ هیلبرت

را بطور کامل حل کند*.

**و. م. برادیس** ریاضی‌دان شوروی، یکی از نتیجه های قضیهٔ هیلبرت را، که برای ریاضیات دورهٔ دبیرستانی مهم است، ذکر کرد: به عنوان مثال لگاریتم اعشاری عدد ۲ چگونه است؟ او می‌نویسد: «بسادگی دیده می‌شود که $\lg ۲$ عددی گنگ است: اگر $\lg ۲$ مساوی عدد گویای $\frac{a}{b}$ باشد، باید تساوی $۲ = ۱۰^{\frac{a}{b}}$ را داشته باشیم، یعنی تساوی $۲^{b} = ۱۰^{a}$ به ازای مقادیر طبیعی $a$ و $b$ برقرار باشد. ولی بسادگی دیده می‌شود که این تساوی ممکن نیست: عدد ۱۰ با هر نمای $a$ به رقمهای مساوی صفر ختم می‌شود، در حالی که $۲^{b}$ تنها به یکی از رقمهای ۲، ۴، ۶، ۸ ختم می‌شود. گنگ بودن عدد $\lg ۲$ این سؤال را مطرح می‌کند که آیا عددی جبری است یا متعالی؟ اگر $\lg ۲$ عدد گنگ جبری باشد، طبق قضیهٔ هلفوند، باید عدد $۱۰^{\lg ۲}$ عددی متعالی باشد، درحالی که این عدد چیزی جز ۲ نیست. بنابراین $\lg ۲$ عددی است متعالی. به همین ترتیب همهٔ لگاریتمهای اعشاری گنگ از عددهای گویا، عددهائی متعالی‌اند».

نظریهٔ عددهای متعالی در سالهای اخیر هم تکامل خود را ادامه می‌دهد و در این مورد هم ریاضی‌دانهای شوروی و هم ریاضی‌دانهای کشورهای دیگر سهم دارند.

---

*) در سال ۱۹۳۶، **شنیدر** ریاضی‌دان آلمانی، اثبات دیگری از نتیجه‌گیری هلفوند ریاضی‌دان شوروی داد، که به افکار زینگل نزدیک بود.

# فصل سوم

## نظریهٔ توابع نمائی و لگاریتمی

## در جبر

# ۱

# تعمیم مفهوم توان

تعمیم مفهوم توان توالی معینی دارد ، یعنی مفهوم نما را ، ابتدا به‌عنوان یك عدد گویا و سپس به‌عنوان یك عدد حقیقی ، تعمیم داد .

برای اینکه بتوانیم برای به‌توان رساندن یك عدد حقیقی مثبت، که نمای آن عدد گویای دلخواهی است ، تعریفی پیدا کنیم ، باید قضیهٔ* زیر را ثابت کنیم : اگر $a$ عددی مثبت و $m$ عددی طبیعی و بزرگتر از واحد باشد ، معادلهٔ

$$x^m = a \qquad (۱)$$

دارای ریشهٔ منحصر به‌فرد مثبت است .

---

* ) این قضیه ، اساس آموزش تعمیم توان است .

دنبالهٔ بی‌نهایت زیر را درنظر می‌گیریم :

$$۰^m, ۱^m, ۲^m, ۳^m, \ldots$$

عددهای این دنباله بطور نامحدود صعودی است . بنابراین دو جملهٔ مجاور دنباله ، مثل $a_۰^m$ و $(a_۰+۱)^m$ ، پیدا می‌شود ، بنحوی که داشته باشیم :

$$a_۰^m < a_۰ < (a_۰+۱)^m$$

اگر $a = a_۰^m$ باشد ، معادلهٔ (۱) به‌ازای $x = a_۰$ برقراراست . فرض می‌کنیم که داشته باشیم :

$$a_۰^m < a < (a_۰+۱)^m,$$

عددهای زیر را در نظر می‌گیریم :

$$a_۰^m ، \left(a_۰+\frac{۱}{۱۰}\right)^m ، \left(a_۰+\frac{۲}{۱۰}\right)^m ، \ldots ،$$

$$\left(a_۰+\frac{۹}{۱۰}\right)^m ، (a_۰+۱)^m.$$

بین این عددها دو عدد مجاور $\left(a_۰+\frac{a_۱}{۱۰}\right)^m$ و $\left(a_۰+\frac{a_۱+۱}{۱۰}\right)^m$ را می‌توان طوری پیدا کرد که داشته باشیم :

$$\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}\right)^m \leqslant a<\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}+۱}{۱۰}\right)^m,$$

اگر $a=\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}\right)^m$ باشد، دراین‌صورت عدد $a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}$ ریشهٔ معادلهٔ (۱) است و اگر $\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}\right)^m<a<\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}+۱}{۱۰}\right)^m$ باشد ، عددهای زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}\right)^m , \left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰^{۲}}\right)^m ,$$

$$\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰^{۲}}\right)^m , \ldots,$$

$$\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{۹}{۱۰^{۲}}\right)^m , \left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}+۱}{۱۰}\right)^m.$$

باقضاوت مشابهی ، می‌توان نتیجه‌گرفت‌که دو عدد مثل

$$\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{a_{۲}}{۱۰^{۲}}\right)^m , \left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{a_{۲}+۱}{۱۰^{۲}}\right)^m,$$

وجود دارد ، بنحوی‌که داشته باشیم :

$$\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{a_{۲}}{۱۰^{۲}}\right)^m \leqslant a<\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{a_{۲}+۱}{۱۰^{۲}}\right)^m.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که یا $a=\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{a_{۲}}{۱۰^{۲}}\right)^m$ است ، که دراین‌صورت عدد $a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{a_{۲}}{۱۰^{۲}}$ ریشهٔ معادلهٔ (۱) است ویاداریم:

$$\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{a_{۲}}{۱۰^{۲}}\right)^m < a<\left(a_{\circ}+\frac{a_{۱}}{۱۰}+\frac{a_{۲}+۱}{۱۰^{۲}}\right)^m,$$

که دراین‌صورت عددهای

$$\left(a_۰+\frac{a_۱}{۱۰}+\frac{a_۲}{۱۰^۲}\right)^m,\ \left(a_۰+\frac{a_۱}{۱۰}+\frac{a_۲}{۱۰^۲}+\frac{۱}{۱۰^۳}\right)^m,\ \ldots,$$

$$\left(a_۰+\frac{a_۱}{۱۰}+\frac{a_۲}{۱۰^۲}+\frac{۹}{۱۰^۳}\right)^m,\ \left(a_۰+\frac{a_۱}{۱۰}+\frac{a_۲+۱}{۱۰^۲}\right)^m,$$

را درنظر می‌گیریم و غیره .

از لحاظ منطقی دو حالت پیش می‌آید: یاعدد طبیعی k وجود دارد بنحوی‌که داشته باشیم :

$$\left(a_۰+\frac{a_۱}{۱۰}+\frac{a_۲}{۱۰^۲}+\cdots+\frac{a_k}{۱۰^k}\right)^m=a$$

که دراین‌صورت عدد $a_۰+\frac{a_۱}{۱۰}+\frac{a_۲}{۱۰^۲}+\ldots+\frac{a_k}{۱۰^k}$ ریشهٔ معادلهٔ(۱) است، ویاچنین عددی وجود ندارد.

فرض می‌کنیم که حالت دوم وجود داشته باشد . قبل از همه متذکر می‌شویم که هریك‌ازعددهای $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... برابر یکی‌ازعددهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، ۹ هستند . کسر اعشاری نامحدود زیر را درنظر می‌گیریم :

$$a_۰\,,\,a_۱a_۲a_۳\cdots$$

این کسر عدد مثبت حقیقی است که ما آن را به $\alpha$ نشان می‌دهیم.

ثابت می‌کنیم که $\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ (۱)، یعنی $a = \alpha^m$ است. فرض می‌کنیم $\alpha^m \neq a$ باشد. عدد طبیعی $n$ را می‌توان چنان انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$a_0, a_1 a_2 \cdots a_n < \alpha < a_0, a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \overline{a_n + 1}$$

یعنی:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n} < \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

و از آنجا:

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n}\right)^m < a < \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n + 1}{10^n}\right)^m.$$

فرض می‌کنیم:

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}=A_n$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n+1}{10^n}=A_n+\frac{1}{10^n}$$

و بنابراین :

$$A_n<\alpha<A_n+\frac{1}{10^n}$$

و

$$A_n^m<a<\left(A_n+\frac{1}{10^n}\right)^m$$

واز آنجا :

$$A_n^m<\alpha^m<\left(A_n+\frac{1}{10^m}\right)^m$$

خواهیم داشت :

$$\left|\alpha^m-a\right|<\left(A_n+\frac{1}{10^n}\right)^m-A_n^m$$

از طرف دیگر داریم :

$$\left(A_n+\frac{1}{10^n}\right)^m-A_n^m=\left(A_n+\frac{1}{10^n}-A_n\right)\left[\left(A_n+\frac{1}{10^n}\right)^{m-1}+\right.$$

$$+\left(A_n+\frac{1}{10^n}\right)^{m-2}A_n+\cdots+\left(A_n+\frac{1}{10^n}\right)A_n^{m-2}+$$

$$+A_n^{m-1}\Big]<\frac{1}{10^n}\cdot m\left(A_n+\frac{1}{10^n}\right)^{m-1},$$

داخل کروشه مقادیر $A_n$ را به مقادیر بزرگتر $\left(A_n+\frac{1}{10^n}\right)$ تبدیل کرده‌ایم. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\left|\alpha^m-a\right|<\frac{m}{10^n}\left(A_n+\frac{1}{10^n}\right)^{m-1} \qquad (2)$$

سپس $$A_n+\frac{1}{10^n}=a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n+1}{10^n},$$

ولی داریم: $$\frac{a_n+1}{10^n}<\frac{1}{10^{n-1}},$$

$$\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n+1}{10^n}<\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{1}{10^{n-1}}=$$

$$=\frac{a_{n-1}+1}{10^{n-1}}<\frac{1}{10^{n-2}},$$ و غیره

و بنابراین

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n} < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10} < a_0 + 1$$

یا

$$A_n + \frac{1}{10^n} < a_0 + 1$$

بنابراین نامساوی (۲) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\left|\alpha^m - a\right| < \frac{m}{10^n}(a_0 + 1)^{m-1} \qquad (۳)$$

ولی عدد n را می‌توان آنقدر بزرگ انتخاب کرد که داشته باشیم :

$$\frac{m}{10^n}(a_0 + 1)^{m-1} < \left|\alpha^m - a\right|$$

درحقیقت با توجه به مثبت بودن عدد $\frac{m(a_0+1)^{m-1}}{\left|\alpha^m - a\right|}$ ، می‌توان

عدد طبیعی n را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم :

$$10^n > \frac{m(a_0+1)^{m-1}}{\left|\alpha^m - a\right|} \qquad (۴)$$

و در چنین حالتی خواهیم داشت :

$$\left|\alpha^{m}-a\right|>\frac{m(a_{0}+1)^{m-1}}{10^{n}},$$

که متناقض با نامساوی (۳) است. به این ترتیب $\alpha^{m}=a$ می شود ، یعنی $\alpha$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۱) است .

ثابت می‌کنیم که معادلهٔ (۱) تنها یك ریشهٔ مثبت دارد . فرض می‌کنیم که معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ مثبت مختلف $\alpha$ و $\beta$ باشد . اگر $\alpha>\beta$ باشد ، $\alpha^{m}>\beta^{m}$ ، یعنی $a>a$ می شود که غیرممکن است .

متذکر می‌شویم که صحت نامساوی (۴) را به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ $n$ می‌توان به این ترتیب اثبات کرد : به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ $n$ داریم :

$$10^{n}>\frac{m(a_{0}+1)^{m-1}}{\left|\alpha^{m}-a\right|}$$

زیرا عدد $\frac{m(a_{0}+1)^{m-1}}{\left|\alpha^{m}-a\right|}$ را می‌توان به صورت کسر اعشاری محدود و یا نامحدود $b_{0}, b_{1}b_{2}b_{3}\ldots$ نوشت و چون داریم :

$$b_0+1 \geqslant b_0,b_1b_2\cdots$$

بنابراین خواهیم داشت : $b_0+2 > b_0,b_1b_2\cdots$

یعنی می‌توان $n=b_0+2$ گرفت .

بالاخره برای اثبات $10^n > n$ گوئیم: $1<10^1$، $2<10^2$، ....، فرض می‌کنیم داشته باشیم :

$$10^k > k \qquad (5)$$

اگر طرفین این نامساوی را در ۱۰ ضرب کنیم ، بدست می‌آید:

$$10^{k+1} > 10k$$

و چون $10k = k+9k > k+k \geqslant k+1$ می‌باشد ، $10k > k+1$ و $10^{k+1} > k+1$ می‌شود. ولی رابطهٔ (۵) به‌ازای $k=1$ صحیح‌است وبنابراین به‌ازای هرمقدار طبیعی عدد $k$ صحیح خواهد بود. درنتیجه عددی مانند $n$ وجود داردکه به ازای آن داشته باشیم :

$$10^n > \frac{m(a_0+1)^{m-1}}{\left|\alpha^m - a\right|}$$

**تعریف** . ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۱) به $\sqrt[m]{a}$ نشان داده می‌شود و ریشهٔ حسابی $m$ام عدد $a$ نامیده می‌شود . اگر $p$ بر $m$ قابل قسمت باشد $\left(\frac{p}{m}=t\right)$ ، در این صورت به ازای عدد های طبیعی $p$ و $m$

داریم : $\sqrt[m]{a^{p}}=\sqrt[m]{a^{mt}}=a^{t}=a^{\frac{p}{m}}$

درحالتی هم‌که p بر m قابل قسمت نباشد ، مظهر $a^{\frac{p}{m}}$ به‌معنای ریشهٔ حسابی mام عدد $a^{p}$ $\left(\sqrt[m]{a^{p}}\right)$ است . وقتی‌که p و m عددهای طبیعی باشنــد ، مظهر $a^{-\frac{p}{m}}$ به معنای $\frac{۱}{a^{\frac{p}{m}}}$ است .

## توان با نمای گویا

اگر n ، p ، k عددهای طبیعی و a عددی مثبت باشد ، در این صورت :

۱) $\sqrt[np]{a^{pk}}=\sqrt[n]{a^{k}}$ . زیــرا اگــر فــرض کنیــم $\alpha=\sqrt[np]{a^{pk}}$ و $\beta=\sqrt[n]{a^{k}}$ ، در این صورت $\alpha^{np}=a^{pk}$ و $\beta^{n}=a^{k}$ می‌شود . از اینجــا $\beta^{np}=a^{pk}$ و $\alpha^{np}=\beta^{np}$ خواهـد شد . اگر $\alpha\neq\beta$ باشد $\alpha^{np}\neq\beta^{np}$ خواهد شد که ممکن نیست .

۲) $\sqrt[m]{a^p}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^p$ . اگر فرض کنیم $\sqrt[m]{a}=\alpha$ ، در این صورت $a=\alpha^m$ و $\alpha^{mp}=a^p$ خواهد شد و از آنجا $a^p=\left(\alpha^p\right)^m$.

یعنی $\alpha^p=\sqrt[m]{a^p}$ و یا $\sqrt[m]{a^p}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^p$ .

۳) $\sqrt[mp]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}$ . فرض می‌کنیم $\sqrt[p]{a}=\alpha$ . دراین صورت $\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[m]{\alpha}$ . از طرف دیگر $a=\alpha^p$ و $\sqrt[mp]{a}=\sqrt[mp]{\alpha^p}=\sqrt[m]{\alpha}$

و بنابراین $\sqrt[mp]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}$ .

ازاینجا بسهولت قواعد عملیات درمورد توانهای بانماهای گویا بدست می‌آید :

$$۱)\ a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}\quad ;\quad ۲)\ a^{r_1}:a^{r_2}=a^{r_1-r_2}\quad ;$$

$$۳)\ \left(a^{r_1}\right)^{r_2}=a^{r_1\cdot r_2}$$

اگر $r_1=\frac{m}{n}$ و $r_2=\frac{p}{q}$ و $m$ ، $n$ ، $p$ ، $q$ عدد های طبیعی باشند ، داریم :

$$a^{r_1}\,a^{r_2}\quad a^{\frac{m}{n}}\,a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^{m}}\cdot\sqrt[q]{a^{p}}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{pn}}=$$

$$=\sqrt[nq]{a^{mq}\cdot a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=$$

$$=a^{r_1+r_2}$$

و شبیه آن :

$$a^{r_1}:a^{r_2}=a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^{m}}:\sqrt[q]{a^{p}}=$$

$$=\sqrt[nq]{a^{mq}}:\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[np]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}=\sqrt[nq]{a^{mq-pn}}=$$

$$=a^{\frac{mq-np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{r_1-r_2}$$

و بالاخره

$$\left(a^{r_1}\right)^{r_2}=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{p}}=$$

$$=\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}=\sqrt[nq]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{r_1\cdot r_1}$$

اگرهم درموردی یکی از عددهای $r_1$ و $r_1$ منفی باشند ، ازتعریف زیر

استفاده می‌کنیم :

$$a^{r_1}=\frac{1}{a^{-r_1}}$$

خواص توانهای با نمای کسری را بررسی می‌کنیم :

۱) اگر $a$ و $b$ دوعدد مثبت و $n$ عددی طبیعی باشد، $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ است وقتی‌که $a>b$ باشد ؛ $a^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}$ است وقتی که $a=b$ باشد ، و $a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$ است وقتی که $a<b$ باشد . اثبات این مطلب بسادگی و با به‌توان $n$ رساندن طرفین نامساوی ، بدست می‌آید .

۲) اگر $x>1$ باشد ، دنبالهٔ

$$x,\ x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{3}},\ \cdots,\ x^{\frac{1}{n}} \qquad (6)$$

بطور یکنوا (مونوتون) نزولی‌است ؛ و اگر $0<x<1$ باشد ، دنبالهٔ (۶) صعودی است وبه‌ازای $x=1$ همهٔ جمله‌های‌آن مساوی ۱ و به‌ازای $x=0$ همهٔ جمله‌های‌آن مساوی صفر است .

حکم اول را ثابت می‌کنیم . طرفین نامساوی $x>1$ را در $x^n$ ضرب می‌کنیم و سپس از طرفین ریشهٔ $n(n+1)$ ام می‌گیریم، بدست

می‌آید :

$$a^{\frac{1}{n}} > x^{\frac{1}{n+1}}$$

حکم دوم هم به همین ترتیب ثابت می‌شود.

۳) اگر $a > 1$ و $m$ عددی طبیعی باشد ، دراین صورت :

a) به ازای $m > 0$ داریم $a^m > 1$ ؛

b) به ازای $m = 0$ داریم $a^m = 1$ ؛

c) به ازای $m < 0$ داریم $a^m < 1$ .

حکم اول را ثابت می‌کنیم . فرض می‌کنیم $m = \frac{p}{q}$ ، که در آن $p$ و $q$ عدد های صحیح‌اند : $a^m = a^{\frac{p}{q}}$ . $a^p > 1$ می شود ، زیرا $a > 1$ است و بنابراین $a^{\frac{p}{q}} > 1$ خواهد بود .

اگر $0 < a < 1$ باشد ، به شرط $m > 0$ ، $a^m < 1$ و به شرط $m = 0$ ، $a^m = 1$ و به‌شرط $m < 0$ ، $a^m > 1$ خواهد بود .

۴) اگر $a > 1$ باشد ، نمای بزرگتر $a$ متناظر با توان بزرگتر $a$ است ، و اگر $0 < a < 1$ باشد، نمای‌بزرگتر $a$ متناظر با توان کوچکتر $a$ است .

درحقیقت اگر $p$ و $q$ دو عدد گویا و $p<q$ باشد، $\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p}$ خواهد بود . ولی $q-p$ مثبت است ، زیرا $p<q$ بود . بنابراین ، اگر $a>1$ باشد ، $a^{q-p}>1$ می‌شود وازآنجانتیجه می‌شود $a^q>a^p$. برعکس اگر $a<1$ باشد، $a^{q-p}<1$ و ازآنجا $a^q<a^p$ خواهد بود . به‌ازای $a=1$ خواهیم داشت $a^m=1$ .

## توان با نمای گنگ

عبارت $a^\alpha$ را برای حالتی‌که $\alpha$ عددی گنگ ، مثبت یا منفی ، باشد ، تعریف می‌کنیم . ولی قبل از آنکه به تعریف $a^\alpha$ بپردازیم ، باید قضیهٔ زیر را ثابت‌کنیم :

$$\lim_{\alpha\to 0} a^\alpha = 1$$

فرض می‌کنیم‌که $a>1$ باشد وفرض می‌کنیم‌که $\alpha$ به‌سمت صفر میل‌کند و مقدار $\frac{1}{n}$ را قبول کند ( $n$ عدد صحیح و مثبتی است که بطور نامحدود صعودی است ) . طبق رابطهٔ مجموع جمله‌های تصاعد هندسی، بدست می‌آید :

$$1+a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{2}{n}}+\cdots+a^{\frac{n-1}{n}}=\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}$$

چون همهٔ جمله های سمت چپ تساوی ، به استثنای جملهٔ اول ، بزرگتر از واحدند ، بنابراین مجموع جمله‌های سمت چپ از n بزرگتر است ، یعنی

$$\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}>n$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود :

$$\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|<\frac{a-1}{n}$$

ولی $\frac{a-1}{n}$ ، با شروع عددی برای n ، می‌تواند از عدد مثبت دلخواه ε کوچکتر باشد . بنابراین

$$\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon$$

این نامساوی ثابت می‌کند ، که واحد، حدی است که عبارت متغیر $a^{\frac{1}{n}}$ به سمت آن میل می‌کند ، به شرطی که n غیر منفی و صعودی باشد .

فرض می‌کنیم که وقتی $\alpha$ به صفر نزدیك می‌شود ، مقادیر مثبت گویائی را قبول کند . n را بزرگترین عدد صحیحی می‌گیریم که در $\frac{1}{\alpha}$ وجود دارد . وقتی که $\alpha$ بطور نامحدود تنزل کند ، عدد n هم بطـور نامحدود ترقی می‌کند .

چون $n < \frac{1}{\alpha}$ است ، نامساوی $1 < a^{\alpha} < a^{\frac{1}{n}}$ بدست می‌آید و از آنجا نامساوی $0 < a^{\alpha} - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1$ نتیجه می‌شود .
ولی ثابت کردیم که وقتی n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد ، داریم:

$\left| a^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon$ . بنابراین خواهیم داشت :

$$\left| a^{\alpha} - 1 \right| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{\alpha \to 0} a^{\alpha} = 1$$

حالا فرض کنیم که $a < 1$ باشد. $a = \frac{1}{b}$ می‌گیریـم که در آن $b > 1$ خواهد بود . دراین صورت :

$$a^{\alpha} = \frac{1}{b^{\alpha}} \Longrightarrow \lim_{\alpha \to 0} a^{\alpha} = \frac{1}{\lim\limits_{\alpha \to 0} b^{\alpha}} = \frac{1}{1} = 1$$

بالاخره فرض می‌کنیم $\alpha$ درحالی که مقادیر منفی‌را قبول می‌کند،

به سمت صفر میل کند. $\alpha=-\beta$ می‌گیریم، که در آن $\beta$ باقبول‌مقادیر مثبت به سمت صفر میل می‌کند. بدست می‌آید:

$$\underset{\alpha\to 0}{\text{حد}}\; a^{\alpha} = \underset{\beta\to 0}{\text{حد}}\; a^{-\beta} = \underset{\beta\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{1}{a^{\beta}}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

حالا عبارت $a^{\alpha}$ را تعریف می‌کنیم. $a>1$ را عددی حقیقی و دلخواه می‌گیریم و در مقابل خود این سؤال را قرار می‌دهیم: وقتی‌که $\alpha$ عددی مثبت و گنگ است، از عبارت $a^{\alpha}$ چه استنباطی بدست می‌آید؟

فرض می‌کنیم دنبالهٔ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$$

حدی مساوی $\alpha$ داشته باشد. یعنی داشته باشیم $\alpha = \underset{k\to\infty}{\text{حد}}\; \alpha_k$ ($\alpha_k$ عددی‌گویا است).

منظور از $a^{\alpha}$ عبارت است از حد عبارت متغیر مثبت $a^{\alpha_k}$، وقتی‌که $k$ ترقی کند:

$$a^{\alpha} = \underset{k\to\infty}{\text{حد}}\; a^{\alpha_k}$$

اگر $a<1$ باشد، $a=\frac{1}{b}$ می‌گیریم که در آن $b>1$ است.

بنابراین توان $a^{\alpha}$ را به‌کمك عبارت $a^{\alpha}=\frac{۱}{b^{\alpha}}$ تعـریف می‌کنیم .

اگر $a=۱$ باشد ، همیشه $۱^{\alpha}=۱$ خواهد بود . بالاخره اگـر توانی با نمـای منفـی و گنگ $\alpha-$ داشته باشیـم ، آن را به‌کمـك تساوی $a^{-\alpha}=\frac{۱}{a^{\alpha}}$ تعریف می‌کنیم .

این‌مطلب می‌ماند که ثابت‌کنیم حد $a^{\alpha_k}$ وقتی‌که $\alpha_k$ به‌سمت $\alpha$ میل می‌کند، وجود دارد . از تعریف عددگنگ به‌عنوان‌کسراعشاری نامحدود غیرمتناوب نتیجه می‌شود که عدد $\alpha=a_۰, a_۱a_۲ \dots$ حد دنبالهٔ کسرهای اعشاری زیر است :

$$a_۰ ;\ a_۰ , a_۱ ;\ a_۰ , a_۱a_۲ ;\ a_۰ , a_۱a_۲a_۳ ; \dots ,$$

که آنها را به‌ترتیب چنین نشان می‌دهیم :

$$\alpha_۰, \alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \dots$$

به همین ترتیب می‌توان دنبالهٔ زیررا ساخت :

$$a_۰+۱ ;\ a_۰,\overline{a_۱+۱} ;\ a_۰,a_۱\overline{a_۲+۱} ;\ \dots ,$$

که باز هم حدی مساوی $\alpha$ دارد .

جمله‌های این دنباله را چنین نشان می‌دهیم :

$$\alpha_۰', \alpha_۱', \alpha_۲', \alpha_۳', \dots$$

ثابت می‌کنیم که :

$$\lim_{k\to\infty}\left(a^{\alpha'_k}-a^{\alpha_k}\right)=0$$

قبلاً توجه می‌کنیم که :

$$a^{\alpha'_k}-a^{\alpha_k}=a^{\alpha_k}\left(a^{\alpha'_k-\alpha_k}-1\right)=a^{\alpha_k}\left(a^{\frac{1}{10^k}}-1\right).$$

چون $\alpha_k<a_0+1$ است ، پس $a^{\alpha_k}<a^{a_0+1}$ خواهد بود ،

یعنی :

$$a^{\alpha'_k}-a^{\alpha_k}<a^{a_0+1}\left(a^{\frac{1}{10^k}}-1\right)$$

ولـی وقتی کـه $k$ به انـدازهٔ کافی بـزرگ بـاشد ، داریـم :

$a^{\frac{1}{10^k}}-1<\frac{\varepsilon}{a^{a_0+1}}$ و بنابراین $0<a^{\alpha'_k}-a^{\alpha_k}<\varepsilon$ و در نتیجه :

$$\lim_{k\to\infty}\left(a^{\alpha'_k}-a^{\alpha_k}\right)=0$$

حالا باید ثابت کنیم که مقداری برای $\lim_{k\to\infty} a^{\alpha_k}$ وجود دارد .

متذکر می‌شویم که به‌ازای هرمقدار $k$ و $l$ داریم : $a^{\alpha_k}<a^{\alpha'_l}$ ، زیرا $\alpha_k<\alpha'_l$ می‌باشد .

اگر عددهای $a^{\alpha_k}$ و $a^{\alpha'_k}$ را به‌صورت کسرهای اعشاری نشان دهیم، می‌توان حکم کرد که وقتی $k$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، $m$ رقم

اول اعشار این عددها ، و هم قسمتهای صحیح آنها ، متناظراً برابرند.

در حقیقت ، با فرض $\varepsilon < \frac{۱}{۱۰^{m}}$ ، وقتی‌که $\bar{k}$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد ، داریم : $a^{\alpha'_{\bar{k}}} < a^{\alpha_{\bar{k}}} < \frac{۱}{۱۰^{m}}$ ، که حکم مذکور را ثابت می‌کند . باید در نظر داشت که به ازای مقادیر $k > \bar{k}$ این خاصیت برقرار است . سپس ، چون داریم :

$$a^{\alpha_k} \leqslant a^{\alpha_{k+۱}} < a^{\alpha'_k} ,$$

باید داشته باشیم :

$$a^{\alpha_{k+۱}} - a^{\alpha_k} < a^{\alpha'_k} - a^{\alpha_k} < \frac{۱}{۱۰^{m}} ,$$

و این نشان می‌دهد که m رقم اول عدد های $a^{\alpha_k}$ و $a^{\alpha_{k+۱}}$ ، مثل قسمتهای صحیح آنها ، متناظراً برابرند . همین مطلب درمورد $a^{\alpha_l}$ هم صادق است $(l > k)$ ، زیرا $a^{\alpha_k} \leqslant a^{\alpha_l} < a^{\alpha'_k}$ می‌باشد.

بنابراین ، با بزرگ شدن k ، رقمهای اعشاری مشترک عدد های $a^{\alpha_k}$ و $a^{\alpha'_k}$ حفظ می‌شود .

عددی را که نمایندهٔ رقمهای مشترک عدد های $a^{\alpha_۰}$ و $a^{\alpha'_۰}$ ، $a^{\alpha_۱}$ و $a^{\alpha'_۱}$ ، $a^{\alpha_۲}$ و $a^{\alpha'_۲}$ ، ... می‌باشد ، می‌نویسیم . کسراعشاری

نامحدودی بدست می‌آید که مساوی عددگویا یا گنگی مثل $A$ می‌شود.

اگر فرض کنیم $\varepsilon < \frac{۱}{۱۰^m}$ ، واضح است که بـه ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ $k$ داریم :

$$\left|a^{\alpha_k} - A\right| < \frac{۱}{۱۰^m},$$

زیرا عددهای $a^{\alpha_k}$ و $A$ ، به‌ازای مقدار به‌اندازهٔ کافی‌بزرگ $k$ ، دارای قسمتهای صحیح و $m$ رقـم اعشاری اولیهٔ مشترك هستند . ایـن مطلب ثابت می‌کند که

$$\underset{k \to \infty}{\text{حد}}\; a^{\alpha_k} = A .$$

از اینجا نتیجه می‌شود که وقتی $k \to \infty$ ، برای $a^{\alpha_k}$ حـدی وجود دارد و این حد مساوی $A$ است.

بسادگی دیده می‌شود که اگر $\beta_k$ دنباله‌ای ازعددهای گویا باحد $\alpha$ باشد ، $\underset{k \to \infty}{\text{حـد}}\; a^{\beta_k} = A$ خـواهد بود . این حکم از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $k$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد $\alpha_k \leqslant \beta_k \leqslant \alpha'_k$ خواهدبود و بنابراین :

$$a^{\alpha_k} \leqslant a^{\beta_k} < a^{\alpha'_k} \text{ و } a^{\beta_k} < a^{\alpha_k} < a^{\alpha'_k} - a^{\alpha_k}$$

یعنی $\underset{k \to \infty}{\text{حـد}} \left(a^{\beta_k} - a^{\alpha_k}\right) = ۰$ و چون حد $a^{\alpha_k}$ ، وقتـی $k \to \infty$ ،

مساوی $A$ است ، پس $\lim\limits_{k\to\infty} a^{\beta_k} = A$ .

به‌این‌ترتیب $\lim\limits_{k\to\infty} a^{\alpha_k}$ وجود دارد ، و یا برای $a^{\alpha_k}$ ، وقتی که $\alpha_k \to \alpha$ ، تنها یك حد وجود دارد .

حالا به تعمیم احکامی که در مورد نماهای گویا ثابت کردیم، در نماهای گنگ ، می‌پردازیم .

اگردر عبارت $a^\alpha$ ، نمای $\alpha$ با قبول مقادیر حقیقی به سمت صفر میل کند ، خود عبارت به سمت واحد میل خواهد کرد .

فرض می کنیم که $\alpha$ عددی مثبت و $n < \frac{۱}{\alpha}$ باشد، دراین صورت $n\alpha < ۱$ , $\alpha < \frac{۱}{n}$ خواهد شد . واضح است که :

$$\left|a^{\alpha} - ۱\right| < \left|a^{\frac{۱}{n}} - ۱\right|$$

ولی وقتی که $\alpha$ بطور نا محدود نزولی باشد ، عدد $n$ بطور نـامحدود صعودی خواهد بود وبنابراین :

$$\left|a^{\frac{۱}{n}} - ۱\right| < \varepsilon$$

و از آنجا :

$$\left|a^{\alpha} - ۱\right| < \varepsilon$$

وبنابراین حکم ثابت شد.

اگر نمای $\alpha$ منفی باشد، $\alpha=-\beta$ فرض می کنیم، بدست‌می آید:

$$\underset{\alpha\to \circ}{\text{حد}}\, a^{\alpha}=\underset{\beta\to \circ}{\text{حد}}\,\frac{\text{۱}}{a^{\beta}}=\frac{\text{۱}}{\underset{\beta\to \circ}{\text{حد}}\, a^{\beta}}=\text{۱}$$

اگر دنبالهٔ عددهای حقیقی

$$x_{\text{۱}}, x_{\text{۲}}, \ldots$$

به‌سمت حد $\alpha$ میل کنند ، در این صورت دنبالهٔ

$$a^{x_{\text{۱}}}, a^{x_{\text{۲}}}, \ldots$$

به سمت حد $a^{\alpha}$ میل می کند، خواه مقادیر $x_{\text{۱}}$، $x_{\text{۲}}$، ...، $\alpha$ گویا باشند یا گنگ .

حد $\alpha$ می‌تواند گویا یا گنگ باشد . حالتی را در نظر می‌گیریم که $\alpha>\circ$ باشدو وقتی که $\alpha$ گنگ‌باشد، آنرا باتقریب $\frac{\text{۱}}{\text{۱}\circ^{k}}$ مساوی $\alpha_k$ و $\alpha'_k$ می‌گیریم و وقتی که $\alpha$ عددی گویاباشد $\alpha_k=\alpha-\frac{\text{۱}}{k}$ , $\alpha'_k=\alpha+\frac{\text{۱}}{k}$ فرض می کنیم .

جمله‌های دنبالهٔ

$$x_{\text{۱}}, x_{\text{۲}}, \ldots$$

وقتی که $k$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، درنامساوی زیر صدق می کند:

$$\alpha_k < x_k < \alpha'_k$$

از آنجا به‌ازای $a>1$ بدست می‌آید :

$$a^{\alpha_k}<a^{x_k}<a^{\alpha'_k}$$

یعنی

$$0<a^{x_k}-a^{\alpha_k}<a^{\alpha'_k}-a^{\alpha_k}$$

و

$$\lim_{k\to\infty}\left(a^{x_k}-a^{\alpha_k}\right)=0$$

ولی داریم : $A=\lim_{k\to\infty} a^{\alpha_k}=A$ و بنابراین

$$\lim_{k\to\infty} a^{\alpha_k}=\lim_{x_k\to\alpha} a^{x_k}=A.$$

به این‌ترتیب $\lim_{x\to\alpha} a^x=a^\alpha$ . ایـن خاصیت تابع نمائی را اتصال گویند .

از اینجا می‌توان بسادگی قواعد مربوط به عملیات روی‌توانهای با نماهای حقیقی را بدست آورد :

۱) ثابت می‌کنیم $a^\alpha \cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$ ، که در آن $\alpha$ و $\beta$ عددهای حقیقی‌هستند. اگر $\alpha$ و $\beta$ عددهای‌گویا باشند، این قاعده صحیح است .

فرض مـی‌کنیم $\alpha$ عـددی گنگ و $\beta$ عددی‌گویا باشد . فرض می‌کنیم $r_1$، $r_2$، $r_3$، ... دنباله‌ای با عددهای حقیقی باشد که به‌سمت $\alpha$ میل کند ، یعنی $\lim_{k\to\infty} r_k=\alpha$ .

چون $r_k$ و $\beta$ گویا هستند ، بنابراین خواهیم داشت :

$a^{r_k}\cdot a^{\beta}=a^{r_k+\beta}$. ولی

$$\lim_{k\to\infty} a^{r_k}\cdot a^{\beta}=a^{\beta}\cdot\lim_{k\to\infty} a^{r_k}=a^{\beta}\cdot\lim_{r_k\to\alpha} a^{r_k}=a^{\beta}\cdot a^{\alpha},$$

$$\lim_{k\to\infty} a^{r_k+\beta}=\lim_{r_k\to\alpha} a^{r_k+\beta}=\lim_{r_k+\beta\to\alpha+\beta} a^{r_k+\beta}=a^{\alpha+\beta}$$

و به‌این ترتیب :

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$$

اگر دو عدد $\alpha$ و $\beta$ گنگ باشند ، در این صورت

$$a^{r_k}\cdot a^{\beta}=a^{r_k+\beta}$$

زیرا $r_k$ گویا و $\beta$ گنگ است . ولی

$$\lim_{r_k\to\alpha} a^{r_k}\cdot a^{\beta}=a^{\beta}\cdot\lim_{r_k\to\alpha} a^{r_k}=a^{\beta}\cdot a^{\alpha},$$

$$\lim_{r_k\to\alpha} a^{r_k+\beta}=\lim_{r_k+\beta\to\alpha+\beta} a^{r_k+\beta}=a^{\alpha+\beta}.$$

از آنجا

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta};$$

۲) ثابت می‌کنیم : $a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta}$.

چون $a^{-\beta}=\frac{1}{a^{\beta}}$ و $a^{\beta}=\frac{1}{a^{-\beta}}$ ، بنابراین

$$a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha}:\frac{1}{a^{-\beta}}=a^{\alpha}\cdot a^{-\beta}=a^{\alpha-\beta};$$

۳) حالا ثابت می‌کنیم: $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$

فرض‌می‌کنیم $\alpha$ عددی‌گنگ و $\beta$ عددی‌گویا باشد. دراین‌صورت $\lim\limits_{k\to\infty} r_k=\alpha$ ، بنابراین از رابطـهٔ $(a^{r_k})^{\beta}=a^{r_k\cdot\beta}$ نتیجه می‌شود :

$$\lim_{r_k\to\alpha}(a^{r_k})^{\beta}=\lim_{r_k\to\alpha}a^{r_k\cdot\beta}\Longrightarrow(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\cdot\beta}$$

اگر $\alpha$ گویا و $\beta$ گنگ باشد ، دنبالهٔ $\beta_1$،$\beta_2$،... را کـه حـدی مساوی $\beta$ دارد می‌سازیم . در این‌صورت

$$(a^{\alpha})^{\beta_k}=a^{\alpha\cdot\beta_k}\ ;\ \lim_{\beta_k\to\beta}(a^{\alpha})^{\beta_k}=\lim_{\beta_k\to\beta}a^{\alpha\beta_k}$$

و یا

$$\lim_{\beta_k\to\beta}(a^{\alpha})^{\beta_k}=\lim_{\beta_k\to\beta}a^{\alpha\beta_k}$$

یعنی

$$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\cdot\beta}$$

بالاخره ، اگر $\alpha$ و $\beta$ گنگ باشند ، از تساوی $(a^{r_k})^{\beta}=a^{r_k\cdot\beta}$ نتیجه می‌شود :

$$\lim_{r_k\to\alpha}(a^{r_k})^{\beta}=\lim_{r_k\alpha\to\beta}a^{r_k\cdot\beta}\Longrightarrow(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\cdot\beta}$$

۴) وقتی که $a$ بزرگتر از واحد باشد ، توان آن همراه با بزرگ شدن نما ، بزرگ می‌شود و برعکس وقتی $a$ کوچکتر از واحد باشد ، توان آن همراه با بزرگ شدن نما ، کوچك می‌شود .

فرض می‌کنیم که عدد $a$ بزرگتر از واحد باشد و $p>q$ در نظر می‌گیریم، که در آن $p$ و $q$ عددهای گویا یا گنگ هستند . دراین‌صورت

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

ولی $p-q>0$ است ، بنابـراین $a^{p-q}$ بزرگتر از واحـد می‌شود و بنابراین $a^p>a^q$. و واضح است در حالتی که $a<1$ باشد، $a^p<a^q$ خواهد شد .

# ۲

# تابع نمائی

وقتی که $a$ بزرگتر ازصفر و غیر از واحد باشد ، عبارت $a^x$ به ازای هرمقدارحقیقی $x$ ، یك عدد حقیقی است . تابع $a^x$ ، وقتی که $a>0$ و $x$ مقدار حقیقی دلخواهی باشد ، تابع نمائی نامیده می‌شود.

چون وقتی $a=1$ باشد ، برای هرمقدار $x$ داریم : $a^x=1$ ، بنابراین درحالت $a=1$ ، تابع را نمائی نمی‌دانند .

قبلاً چند خاصیت تابع نمائی $a^x$ را ذکر کردیم . حالا ثابت می‌کنیم که اگر $a>1$ باشد ، داریم :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} a^x=0$$

و اگر $0<a<1$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty$$

اگر $a>1$ و $n$ عددی طبیعی باشد، داریم:

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a+1),$$

و چون $a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a+1>n$ است، پس خواهیم داشت:

$$a^n-1>(a-1)n \quad \Rightarrow a^n>(a-1)n+1$$

وقتی که $n$ به اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب شود، $a^n$ از هر عدد دلخواه مثبتی مثل $c$ بزرگتر خواهد بود. زیرا اگر $n>\frac{c-1}{a-1}$ باشد، $n(a-1)>c-1$ یا $n(a-1)+1>c$ وبنابراین $a^n>c$ خواهدشد.

$x$ را عدد حقیقی مثبت بزرگتر از واحد و $n$ را عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی $x$ می‌گیریم. اگر $x>\frac{c-1}{a-1}$ بگیریم، $n>\frac{c-1}{a-1}$ خواهد شد، زیرا $x>n$ بود. از اینجا $a^n>c$ و در نتیجه $a^x>c$ می‌شود. به این ترتیب به ازای $x>\frac{c-1}{a-1}$، خواهیم داشت:

$$a^x>c$$

به این ترتیب $a^n>c$ وقتی برای هرعدد مثبت دلخواه $c$ برقرار

است که $x$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد ، یعنی

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

سپس می‌توان نوشت .

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$$

درحالتی که $0<a<1$ باشد ، $\frac{1}{a}>1$ می‌شود و بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 0 \;;$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = +\infty$$

حالا ثابت می‌کنیم تابع $a^x$ می‌تواندمساوی‌هرعدد مثبت دلخواه باشد.

$a>1$ و $c$ را عدد مثبت دلخواهی فرض می‌کنیم . ثابت می‌کنیم که مقدارمنحصرمثبتی مثل $\alpha$ برای آوند وجوددارد،بطوری که $a^\alpha=c$ باشد . به عبارت دیگر ثابت می‌کنیم که معادلهٔ

$$a^x = c \qquad (7)$$

به ازای $a>1$ ، تنها یك ریشهٔ حقیقی دارد .

$c>1$ فرض می‌کنیم . چون عددهای دنبالهٔ :

$$a^0 \,,\; a^1 \,,\; a^2 \,,\; \cdots$$

بطور نـامحدود ترقـی می‌کند ، بین آنها می‌توان دو عدد $a^{\alpha_0}$ و $a^{\alpha_0+1}$ چنان پیدا کـرد کـه $a^{\alpha_0} < c < a^{\alpha_0+1}$ بـاشد .

اگر $a^{\alpha_0}=c$ باشد ، در این صورت $\alpha_0$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۷) است و قسمتی ازقضیه ثابت شده است (اثبات منحصر بودن این ریشه باقی می‌ماند) .

اگر $a^{\alpha_0}<c$ باشد ، عددهای زیر را درنظر می‌گیریم :

$$a^{\alpha_0},\ a^{\alpha_0+\frac{1}{10}},\ a^{\alpha_0+\frac{2}{10}},\ \dots,\ a^{\alpha_0+\frac{9}{10}},\ a^{\alpha_0+1}$$

چون این عددها ترقی می‌کنند ، دو عدد $a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}}$ و $a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1+1}{10}}$ می‌توان پیدا کرد ، بطوری‌که داشته باشیم :

$$a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}} < c < a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1+1}{10}}$$

دوباره اگر $a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}}=c$ باشد ، $\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}$ ریشهٔ معادلهٔ (۷) است . اگر $a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}}<c$ باشد ، عددهای زیر را در نظر می‌گیریم :

$$a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}},\ a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{1}{10^2}},\ a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{2}{10^2}},\ \dots,$$

$$a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{9}{10^2}}, \quad a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1+1}{10}},$$

و استدلال را به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم . در جریان استدلال ممکن است‌عددی مانند $k$ پیدا شود بنحوی که داشته باشیم :

$$a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha^2}{10^2}+\cdots+\frac{\alpha_k}{10^k}}=c$$

که در این صورت همین عدد ریشهٔ معادلهٔ (۷) است . ولی اگر چنین عددی بدست نیاید ، جریان عمل نامحدود است و هرچقدر $k$ را بزرگ بگیریم ، داریم :

$$a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\cdots+\frac{\alpha_k}{10^k}}\leqslant c<a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\cdots+\frac{\alpha_k+1}{10^k}}$$

متذکر می‌شویم که عددهای $\alpha_1$ ، $\alpha_2$ ، ... صحیح ، غیرمنفی و کوچکتر از ۱۰ هستند .

کسر اعشاری نامحدود زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ \cdots$$

این کسر ، یك عدد حقیقی مثبت را تعیین می‌کند :

$$\alpha=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ \cdots$$

ثابت می‌کنیم که $\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ (۷) است .

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $a^\alpha<c$ باشد .

اگر $\gamma = c - a^{\alpha}$ بگیریم، وقتی که k به اندازهٔ کافی بزرگ باشد ،

$c < \frac{1}{10^{\gamma}}$ خواهد بود .

دنبالهٔ نامحدود زیر را درنظر می‌گیریم :

$$a^{\alpha_0 + 1}, \quad a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10}}, \quad \dots,$$

$$a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_k - 1}{10^{k-1}} + \frac{\alpha_k + 1}{10^k}}$$

که عددهای آن مرتباً کوچك می‌شوند وحدی مساوی $e^{\alpha}$ دارند. وقتی

که k به اندازهٔ کافی بزرگ باشد ، عدد $a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_k + 1}{10^k}}$

به‌هراندازه که بخواهیم به $e^{\alpha}$ نزدیك خواهد شد . به عبارت دیگر

داریم : $a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_k + 1}{10^k}} - a^{\alpha} < \gamma$

و چون $\gamma = c - a^{\alpha}$ است ، خواهیم داشت :

$$a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_k + 1}{10^k}} < c$$

که ممکن نیست .

حال فرض می‌کنیم $a^{\alpha} > c$ باشد. $\bar{\gamma} = a^{\alpha} - c$ می‌گیریم و

دنبالهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$a^{\alpha_0}\ ,\ a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}}\ ,\ a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}}\ ,\ \ldots$$

این دنباله صعودی است و حدی مساوی $a^{\alpha}$ دارد . به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ $k$ بدست می‌آید :

$$a^{\alpha}-a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\cdots+\frac{\alpha_k}{10^k}}<\gamma \Rightarrow$$

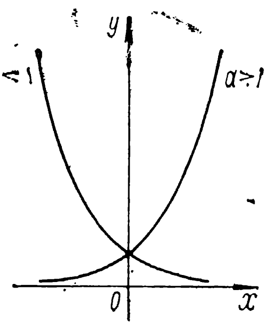
$$\Rightarrow a^{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\cdots+\frac{\alpha_k}{10^k}}>c$$

که ممکن نیست . بنابراین $a^{\alpha}=c$ می‌شود .

فرض می‌کنیم $1>c>0$ باشد . در معادلهٔ (۷) $x$ را به $-t$ تبدیل می‌کنیم . بدست می‌آید $a^{-t}=c$ و از آنجا $a^{t}=\frac{1}{c}$ .

این معادله شبیه معادلهٔ (۷) است ، زیرا $\frac{1}{c}>1$ و $a>1$ است. این معادله ریشهٔ مثبتی برای $t$ و بنابراین معادلهٔ (۷) ریشهٔ منفی برای $x$ دارد. به ازای $c=1$ ، ریشهٔ معادلهٔ (۷) مساوی صفر است .

ثابت می‌کنیم که معادلهٔ (۷) ریشهٔ منحصر به فرد حقیقی دارد. فرض می‌کنیم که معادله دو ریشهٔ متمایز $\alpha$ و $\beta$ داشته‌باشد. چون



شکل ۳

$\alpha\neq\beta$ ، ولی $a^{\alpha}=c$ و $a^{\beta}=c$ است ، پس $a^{\alpha}=a^{\beta}$ می‌شود . فرض می کنیم $\alpha>\beta$ باشد، دراین صورت $a^{\alpha-\beta}=۱$ مـی‌شود . ولی وقتی که $\alpha-\beta>۰$ بـاشد $a^{\alpha-\beta}>۱$ می‌شود و بـه این ترتیب‌به‌تناقض برخورد می کنیم.

حالادوباره به‌معادلهٔ (۷) برمی‌گردیم وفرض‌می‌کنیم $۰<a<۱$ باشد . معادله را چنین می‌نویسیم :

$$\left(\frac{۱}{a}\right)^{x}=\frac{۱}{c}$$

در اینجا $\frac{۱}{a}>۱$ است و معادله جواب مثبت منحصر به‌فردی دارد .

ازقضیه‌ای که ثابت شد نتیجه می‌شود که وقتی a و c عددهـای مثبتی باشند ، عدد حقیقی و ضمناً منحصر به‌فرد $\alpha$ را می‌توان پیدا کرد که داشته باشیم : $a^{\alpha}=c$ . این عدد $\alpha$ را لگاریتم عدد c در مبنای a گویند و به صورت $log_{a}c$ نشان می‌دهند .

ازتعریف لگاریتم نتیجه می‌شود :

$$a^{log_{a}c}=c$$

منحنی تـابع نمائی $y=a^{x}$ بـرای حالتهای $a>۱$ و $a<۱$ در شکل۳ داده شده است.

# ۳

# تابع لگاریتمی

تابع $y=log_a x$ ، وقتی که $a>0$ و $a\neq 1$ باشد، به‌ازای $x>0$ معین است ، زیرا معادلهٔ $a^y=x$ درشرایط مفروض ریشهٔ حقیقی منحصر به‌فردی دارد .

خواص اساسی تابع لگاریتمی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم :

۱) $log_a 1=0$ . این خاصیت ناشی از تعریف لگاریتم است ؛

۲) تابع $log_a x$ وقتی $a>1$ باشد صعودی ، و وقتی $a<1$ باشد نزولی است .

فرض می کنیم $a>1$ و $x_1>x_2>0$ باشد . $log_a x_1=y_1$ و

$\log_a x_۲ = y_۲$ می‌گیریم. ثابت‌می‌کنیم که $y_۱ > y_۲$ است. چون $x_۱ = a^{y_۱}$ و $x_۲ = a^{y_۲}$ ، پس $a^{y_۱} > a^{y_۲}$ یعنی $a^{y_۱ - y_۲} > ۱$ خواهد بود .

اگر $y_۱ < y_۲$ یعنی $y_۱ - y_۲ < ۰$ باشد ، $a^{y_۱ - y_۲} < ۱$ و اگر $y_۱ = y_۲$ باشد ، $a^{y_۱ - y_۲} = ۱$ می‌شود که غیرممکن است ، بنابراین $y_۱ > y_۲$ است .

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که به ازای $a < ۱$ ، اگر $x_۱ > x_۲$ باشد ، $\log_a x_۱ < \log_a x_۲$ خواهد بود ؛

۳) وقتی‌که $a > ۱$ باشد ، به ازای $x > ۱$ ، $\log_a x > ۰$ وبه‌ازای $x < ۱$ ، $\log_a x < ۰$ است . به ازای $x = ۱$ ، $\log_a x = ۰$ است و چون $\log_a x$ تابعی صعودی است ، می‌توان صحت خاصیت ۳ را بسهولت نتیجه گرفت. به همین ترتیب وقتی که $a < ۱$ باشد ، به ازای $x < ۱$ ، $\log_a x > ۰$ و به ازای $x > ۱$ ، $\log_a x < ۰$ است ؛

۴) وقتی $a > ۱$ باشد ، داریم :

$$\text{حد}_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad ; \quad \text{حد}_{x \to ۰} \log_a x = -\infty$$

و وقتی که $a < ۱$ باشد :

$$\text{حد}_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \quad ; \quad \text{حد}_{x \to ۰} \log_a x = +\infty$$

$a>1$ و $c$ عددی مثبت و به اندازهٔ کافی بزرگ می‌گیریم. اگر $x>a^c$ باشد، با توجه به صعودی بودن تابع $\log_a x$، خواهیم داشت:

$$\log_a x>\log_a a^c$$

یعنی $\log_a x>c$ و بنابراین $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$ .

اگر $0<x<\frac{1}{a^c}$ باشد ، $\log_a x<-c$ می‌شود و بنابراین $\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=-\infty$. چون $\log_a x=-\log_{\frac{1}{a}} x$ (بنابه تعریف لگاریتم)،

بنابراین وقتی $0<a<1$ باشد ، داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{a}} x=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\log_a x=-\lim_{x\to 0}\log_{\frac{1}{a}} x=+\infty;$$

۵) تابع $\log_a x$ می‌تواند مساوی هرعدد حقیقی دلخواه باشد .

$N$ را عدد حقیقی دلخواهی فرض می کنیم و $a^N=\alpha$ می‌گیریم.
در این‌صورت با توجه به تعریف لگاریتم داریم : $N=\log_a\alpha$ ؛

۶) ثابت می کنیم که $\lim\limits_{x\to\alpha}\log_a x=\log_a\alpha$ .

قبلا ثابت می‌کنیم که $\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\ \log_a x = ۰$ . در حالت $a>۱$ ،

دنبالهٔ زیر را درنظر می‌گیریم :

$$a^{۱} ,\quad a^{\frac{۱}{۲}} ,\quad a^{\frac{۱}{۳}} ,\ \dots \qquad (۸)$$

این دنباله نزولی است و حدی مساوی واحد دارد و بنابراین داریم :

$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ a^x = ۱$ ، چون $\log_a a^{\frac{۱}{n}} = \frac{۱}{n}$ است ، نتیجه می‌شود :

$$\underset{a^{\frac{۱}{n}}\to ۱}{\text{حد}}\ \log_a a^{\frac{۱}{n}} = ۰ \quad \text{یا} \quad \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \log_a a^{\frac{۱}{n}} = ۰$$

دنبالهٔ نزولی و بی‌نهایت زیر را که حدی مساوی واحد داشته باشد ، در نظر می‌گیریم :

$$a_{۱} ,\ a_{۲} ,\ a_{۳} ,\ \dots$$

چون دنباله نزولی است وحدی مساوی واحد دارد ، با شروع از جملهٔ $a_k$ نامساوی $a_k > a_n > ۱$ برقرار است .

$\varepsilon$ را عدد مثبت وبه دلخواه کوچک‌می‌گیریم . در این صورت

وقتی $l$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد نامساوی $\frac{۱}{l} < \varepsilon$ یا $\log_a a^{\frac{۱}{l}} < \varepsilon$

برقرار است .

ثابت می‌کنیم که به ازای هر عدد $l$ می‌توان عدد $a_n$ را طوری پیدا کرد که $a_n<a^{\frac{۱}{l}}$ باشد . در حقیقت اگر بـه ازای هرمقدار $n$ ، $a_n>a^{\frac{۱}{l}}$ باشد، $a_n-۱>a^{\frac{۱}{l}}-۱$ می‌شود، درحالی که به‌ازای‌مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ $n$ ، باید $a_n-۱$ از هر عدد مثبتی ، و منجمله $a^{\frac{۱}{l}}-۱$ کوچکتر باشد.

به این ترتیب برای هر مقدار $l$ ، مقداری برای $a_n$ پیدا می‌شود که $a_n<a^{\frac{۱}{l}}$ باشد ، در این‌صورت نامساوی $\log_a a_n<\frac{۱}{l}<\varepsilon$ برقرار خواهد بود. وچون $a_n>a_{n+۱}>a_{n+۲}>\dots$ ، بنابراین برای هر مقدار $m\geqslant n$ باید $\log_a a_m<\varepsilon$ باشد . از آنجا :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \log_a a_n=۰$$

و یا

$$\underset{a_n\to ۱}{\text{حد}}\ \log_a a_n=۰$$

اگر دنبالهٔ :

$$b_۱\ ,\ b_۲\ ,\ b_۳\ ,\ \dots$$

صعودی و حدی مساوی واحد داشته باشد ، بـازهم خواهیم داشت :

$\underset{n \to \infty}{\text{حد}} \log_a b_n = 0$ در حقیقت دنباله :

$$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \cdots$$

نزولی است و بنابراین داریم :

$$\log_a b_n = \log_a \frac{1}{\left(\frac{1}{b_n}\right)} = -\log_a\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

ازطرف دیگر داریم :

$$\underset{n \to \infty}{\text{حد}} \log_a\left(\frac{1}{b_n}\right) = 0,$$

و بنابراین نتیجه می‌شود :

$$\underset{n \to \infty}{\text{حد}} \log_a b_n = 0$$

حالا دنبالهٔ :

$$c_1, c_2, c_3, \cdots \qquad (9)$$

را درنظر می‌گیریم (بدون اینکه آن رامشروط به صعودی یانزولی‌بودن بکنیم) بطوری‌که حدی مساوی واحد داشته‌باشد .

$\varepsilon$ را عددی مثبت و به دلخواه کوچك می‌گیریم . عدد طبیعی مثل $l$ طوری پیدا می‌کنیم که $\frac{1}{l} < \varepsilon$ باشد. دراینصورت خواهیم‌داشت

$-\frac{1}{l} > -\varepsilon$ ، از اینجا اگر $a>1$ باشد $a^{\frac{1}{l}} < a^{\varepsilon}$ و $a^{-\frac{1}{l}} > a^{-\varepsilon}$ خواهد شد .

باتوجه به‌اینکه $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ است ، جملهٔ $c_n$ را در دنبالهٔ (۹) چنان پیدا می‌کنیم که به ازای هرمقدار $n>m$ داشته باشیم : $a^{-\frac{1}{l}} < c_n < a^{\frac{1}{l}}$ . بنابراین خواهیم داشت :

$$-\frac{1}{l} < \log_a c_n < \frac{1}{l} \;;\quad -\varepsilon < \log_a c_n < \varepsilon$$

که از آنجا نتیجه می‌شود :

$$|\log_a c_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \log_a c_n = 0$$

حالا به سادگی ثابت می‌شود که :

$$\lim_{x\to\alpha} \log_a x = \log_a \alpha$$

دنبالهٔ زیر را درنظر می‌گیریم :

$$x_1 , x_2 , x_3 , \cdots$$

که حدی مساوی $\alpha \neq 0$ داشته باشد . در این صورت دنبالهٔ :

$$\frac{x_1}{\alpha} , \frac{x_2}{\alpha} , \frac{x_3}{\alpha} , \cdots$$

حدی مساوی واحد دارد و بنابراین $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ log_a \dfrac{x_n}{\alpha} = \circ$ مـی‌شود ،

از طرف دیگر داریم :

$$log_a \frac{x_n}{\alpha} = log_a x_n - log_a \alpha$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(log_a x_n - log_a \alpha) = \circ$$

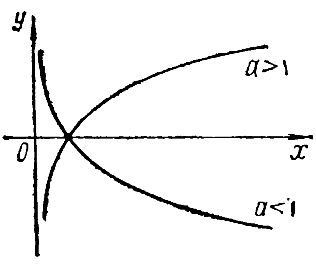
و چـون :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ log_a \alpha = log_a \alpha$$

بنابراین :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ log_a x_n = log_a \alpha \Rightarrow \underset{x\to\alpha}{\text{حد}}\ log_a x = log_a \alpha$$

چـون تـابـع لگاریتمی $y = log_a x$ را می‌توان باتساوی $x = a^y$ بیان کرد ، منحنی آن از این راه بدست می‌آید که در منحنی $y = a^x$ جای محورهای




شکل ۴

مختصات را عوض کنیم : محور ox را به‌محور oy و محور oy را

به‌محور $ox$ تبدیل کنیم ، یعنی تساوی $y = a^x$ را به تساوی $x = a^y$ تغییر دهیم .

بنابراین ، اگر محورهای مختصات را در وضع عادی بگیریم ، نمایش تغییرات تابع لگاریتمی $y = log_a x$ به صورتی که در شکل ۴ نشان داده شده است ، درمی‌آید .

# فصل چهارم

## نظریهٔ تابع لگاریتمی و
## تابع نمائی در آنالیز ریاضی

# ۱

# طرح نظریه در حوزهٔ اعداد حقیقی

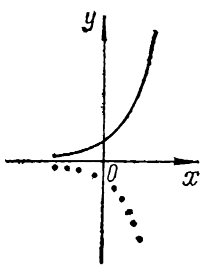
در جبر مقدماتی نمای توانها را ابتدا به‌عنوان عددهای گویا وسپس به عنوان عددهای حقیقی تعمیم می‌دهند و آن وقت توابع نمائی را مورد مطالعه قرار می‌دهند و توابع لگاریتمی را به عنوان عکس توابع نمائی درنظر می‌گیرند.

با طرح نظریه به این ترتیب، سؤالهای چندی پیش می‌آید که باید آنها را روشن کرد و ما به آنها می‌پردازیم.

اولاً در تابع نمائی $y=a^x$، پایهٔ $a$ همیشه عددهای مثبت را

قبول می‌کند. اگر پایهٔ a منفی باشد، مقدار y به‌ازای مقادیر صحیح x، مثبت یا منفی می‌شود (درحالتی‌که x زوج باشد ، مثبت و درحالتی که x فرد باشد ، منفی)، و اگر x عددی‌گویا باشد، y حتی‌مقادیرموهومی را قبول می‌کند، و به این ترتیب یك منحنی متصل‌برای تابع $y=a^x$ بدست نمی‌آوریم .

ثانیاً ، وقتی‌که $a>0$ باشد ، به‌ازای مقادیرگویای $x=\frac{p}{q}$ ($p$ ، q نسبت‌بهم‌اولند) فرض می‌کنند : $y=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ .




شکل ۵

می‌بینیم که ریشگی ، q ارزشی است ، یعنی دارای q جواب است (حقیقی وموهومی)، اگر هم فقط مقادیر حقیقی را انتخاب‌کنیم، وقتی که q عددی زوج باشد ، دو مقداربدست می‌آید (شکل ۵) ، به‌همین مناسبت شرط می‌شودکه تنها مقادیر ریشهٔ حسابی (مثبت یا اصلی)درنطر گرفته شود .

در این مطلب هم ابهامی هست که چرا ، در این حالت ، وقتی که x همهٔ مقادیر حقیقی را اختیارکند ، مقادیر اصلی‌بالای محور ox متعلق به یك منحنی متصل‌اند ، در حالتی‌که مقادیر منفی متناظر با یك

منحنی متصل نیستند .

به این ترتیب دیده می‌شود که تعریف تابع نمائی و همراه آن تابع لگاریتمی ، به عنوان تابع یك ارزشی و فقط برای مقادیر مثبت آوند ، به‌اندازهٔ کافی مبهم است . بررسی دقیق این سؤالها وجوابهای مربوطه در دورهٔ آنالیز ریاضی انجام می‌گیرد .

در آنالیز ریاضی دو روش‌برای طرح نظریه وجود دارد، یعنی: ازتابع‌نمائی به تابع لگاریتمی و برعکس. نخستین روش طرح نظریه (تعریف تابع نمائی به کمك رشته و سپس تعریف تابع لگاریتمی به عنوان عکس تابع نمائی) برای بسیاری از خواننده‌ها روشن است ، بنابراین به بررسی روش دوم می‌پردازیم که کمتر متداول است ، ولی ساده‌تر و قابل‌فهم‌تر است .

درطرح نظریه با روش دوم ، لگاریتم به کمك انتگرال تعریف می‌شود و سپس تابع‌نمائی به عنوان عکس‌تابع لگاریتمی موردمطالعه قرار می‌گیرد .

### تابع لگاریتمی

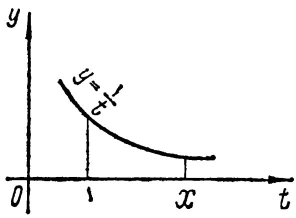
تابع زیر را ، وقتی‌که $x > 0$ باشد ، درنظر می‌گیریم :

$$y = \int_{1}^{x} \frac{dt}{t} = f(x)$$

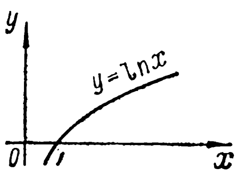
این تابع را لگاریتم طبیعی x می‌نامیم و به صورت $y=\ln x$ می‌نویسیم.

از لحاظ هندسی، این تابع عبارت‌است از مساحت محدود به هذلولی $y=\frac{1}{t}$ ومحور $t$ وخطهای $t=1$ و $t=x$ (شکل ۶).

متذکر می‌شویم که طبق تعریف، وقتی‌که $x>1$ باشد سطح را مثبت؛ و وقتی‌که $x<1$ باشد سطح را منفی به حساب می‌آورند؛ وقتی‌که $x=1$ باشد سطحی وجود ندارد و بنابراین $\ln 1=0$ است.



شکل ۶



شکل ۷

از تعریف لگاریتم نتیجه می‌شود که نمی‌توان لگاریتم صفر و عددهای منفی را بدست آورد، زیرا انتگرال در فاصله‌ای که شامل $x=0$ باشد، متباعد است.

منحنی تابع لگاریتمی را می‌توان به صورت شکل ۷ نشان‌داد.

از تعریف لگاریتم می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

حالا به بسط تابع $\ln(1+a)$ بر حسب قوای $a$ می‌پردازیم.

می‌دانیم :

$$\ln a=\int_1^a u^{-1}du$$

بنابراین می‌توان نوشت :

$$\ln(1+a)=\int_0^a(1+u)^{-1}du=\int_0^a[1-u+u^2-\cdots+$$

$$+(-1)^{m-1}u^{m-1}+(-1)^m u^m(1+u)^{-1}]du=$$

$$=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{a^m}{m}+R_m$$

که در آن $R_m=(-1)^m\int_0 u^m(1+u)^{-1}du$ می‌باشد.

اگر $-1<a<1$ باشد داریم :

$$|R_m|<\int_0^{|a|}u^m(1-|a|)^{-1}du=|a|^{m+1}[(m+1)(1-|a|)]^{-1}\to 0$$

(وقتی که $m\to\infty$)

به این ترتیب، درحالتی که $-1<a<1$ باشد، $\ln(1+a)$

را می‌توان به صورت رشتهٔ متقارب زیر نوشت :

$$\ln(1+a)=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\dots=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{a^m}{m}$$

اگر $a=1$ باشد ، داریم :

$$|R_m|=\int_0^1 u^m(1+u)^{-1}du<\int_0^1 u^m du=(m+1)^{-1}\to 0$$

(وقتی‌که $m\to\infty$)

بنابراین ، درحالتی‌که $a=1$ باشد ، بسط به قوت خود باقی است ، ولی درحالت $a=-1$ معنای خودرا از دست‌می‌دهد .

خواص تابع لگاریتمی را بررسی می‌کنیم .

تابع لگاریتمی درقانون زیر صدق می‌کند :

$$f(a\cdot b)=f(a)+f(b) \qquad f(a)$$

که در آن $f(a)=\ln a$ ، $f(b)=\ln b$ ، $f(ab)=\ln(ab)$ است .

این رابطه را ، قضیهٔ مجموع گویند و اثبات آن با توجه به تعریف لگاریتم بدست می‌آید . درحقیقت داریم :

$$f(ab)=\int_1^{ab}\frac{dt}{t}=\int_1^{a}\frac{dt}{t}+\int_a^{ab}\frac{dt}{t}$$

ازطرف دیگر معلوم است که :

$$\int_a^{ab}\frac{dt}{t}=\int_1^{b}\frac{dt}{t}$$

این تساوی در نتیجهٔ تغییر متغیر $at'=t$ بدست می‌آید. بنابراین :

$$\int_{1}^{ab}\frac{dt}{t}=\int_{1}^{a}\frac{dt}{t}+\int_{1}^{b}\frac{dt}{t}$$

و یا

$$f(ab)=f(a)+f(b)$$

از قضیهٔ جمع ، تساویهای زیر نتیجه می‌شود :

$$f(a_1a_2\cdots a_n)=f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\ ,$$

$$f\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=f(a_1)-f(a_2)\ ,$$

$$f(a^n)=nf(a)\ .$$

$$f\left(\sqrt[n]{a}\right)=\frac{1}{n}\ (a)\ .$$

تابع لگاریتمی یک تابع یکنوا (مونوتون) است، زیرا مقدار $\ln x$ با زیاد شدن $x$ ، صعودی و با کم شدن $x$ ، نزولی است .

بالاخره ثابت می‌کنیم که وقتی متغیر مستقل $x$ ازمجموعهٔ متصل همهٔ عددهای مثبت عبور کند ، تابع لگاریتمی همهٔ مقادیر از $-\infty$ تا $+\infty$ را قبول می‌کند . برای اثبات از تساوی $\ln 2^n=n\ln 2$ استفاده می‌کنیم . چون $\ln 2>0$ است ، برای $x=2^n$ ، وقتی‌که $n$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد ، تابع $\ln x$ مقداری بـه اندازهٔ دلخواه بزرگ خواهد داشت .

سپس تساوی $n\frac{1}{2^n}=-n\ln 2$ را در نظر می‌گیریم. از اینجا می‌توان ثابت کرد که وقتی $x$ مقداری مثبت باشد و به‌سمت صفر میل کند، مقدار $\ln x$ به‌سمت $-\infty$ میل خواهد کرد.

## تابع نمائی

ثابت کردیم که تابع لگاریتمی نسبت به $x$ یکنوا است و همهٔ مقادیر حقیقی را قبول می‌کند، بنابراین تابع معکوس آن، که آن‌را موقتاً با $x=\varphi(y)$ نشان می‌دهیم، یك ارزشی، یکنوا و برای هر مقدار $y$ معین است. علاوه بر آن، تابع معکوس قابل دیفرانسیل‌گیری است، زیرا $\ln x$ تابعی قابل دیفرانسیل‌گیری است.

قبلاً نقش متغیر مستقل و متغیر وابسته را عوض می‌کنیم و تابع را به صورت $\varphi(x)$ مطالعه می‌کنیم.

تابع $\varphi(x)$، به ازای هرمقداری از $x$، مثبت است. سپس، چون لگاریتم واحد مساوی صفر است، بنابراین $\varphi(0)=1$ می‌شود. ازقضیهٔ جمع برای لگاریتم، بسادگی قضیهٔ ضرب برای تابع معکوس نتیجه می‌شود.

$a$ و $b$ را دوعدد درنظرمی‌گیریم که به‌ترتیب لگاریتمهای دوعدد

$\alpha$ و $\beta$ باشند : $a=\ln\alpha$ یا $\alpha=\varphi(a)$ ؛ $b=\ln\beta$ یا $\beta=\varphi(b)$ بدست می‌آید :

$$\ln(\alpha\beta)=\ln\alpha+\ln\beta=a+b$$

و از آنجا :

$$\varphi(a+b)=\alpha\beta \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)=\varphi(a+b)$$

رابطهٔ اخیر خاصیت اصلی تابع $y=\varphi(x)$ را مشخص می‌کند. این خاصیت اجازه می‌دهد که تابع $\varphi(x)$ را ، تابع نمائی بنامیم و آن‌را به صورت $y=e^x$ نشان دهیم. این خاصیت به این شرط مورد استفاده قرار می‌گیرد که عددی مانند e وجود دارد که برای آن $\ln e=۱$ و یا $e=\varphi(۱)$ است. از قضیهٔ جمع، می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر مقدار صحیح ومثبت n داریم : $\varphi(n)=e^n$ و به ازای مقادیر صحیح m و n داریم: $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=e^{\frac{m}{n}}$.

تساوی $\varphi(r)=e^r$ ، که برای مقادیر گویا و مثبت r داده شده ، برای مقادیر گویا ومنفی r هم صحیح است ، زیرا داریم :

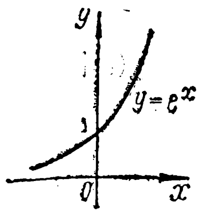
$$\varphi(r)\cdot\varphi(-r)=\varphi(۰)=۱$$

به این ترتیب، تابع $\varphi(x)$ به ازای همهٔ مقادیر x متصل است و به ازای همهٔ مقادیر گویای $x=r$ بر تابع $e^x$ منطبق است. براین‌اساس، تابع $\varphi(x)$ را می‌توان به صورت $e^x$ نشان داد (که x هر عدد گویایی

می‌تواند باشد)، زیرا $\varphi(x_n)=e^{x_n}$ و بنا بر اتصال $\varphi(x)$ داریم :

$$\varphi(x)=\text{د}\xrightarrow[x_n\to x]{}\varphi(x_n)$$

تابع نمائی $y=e^x$ را می‌توان به‌کمك یك منحنی نشان داد، که ازقرینهٔ منحنی لگاریتمی نسبت به نیمساز ربع اول بدست می‌آید (شکل ۸).



شکل ۸

مشتق تابع نمائی با این رابطه بیان می‌شود :

$$\frac{d}{bx}(e^x)=e^x$$

می‌بینیم که تابع نمائی در دیفرانسیل‌گیری تغییر نمی‌کند. به‌اثبات این رابطه می‌پردازیم .

فرض می‌کنیم $x=\ln y$ ، از آنجا بدست می‌آید :

$$\text{،}\frac{dx}{dy}=\frac{۱}{y}$$

بنابراین بنا بر قاعدهٔ مربوط به توابع معکوس بدست می‌آید :

$$\frac{dy}{dx}=y=e^x$$

متذکر می‌شویم که، به قول کلین (۱۸۴۹-۱۹۲۵) ریاضی دان آلمانی، تعریف لگاریتم به‌کمك تربیع هذلولی، مأخذ درستی برای ورود به توابع جدید است. علاوه بر آن طرح مطلب به‌چنین صورتی،

هم منطبق با تاریخ تکامل لگاریتم است وهم روش آن در ریاضیات عالی مورد استفاده قرار می‌گیرد .

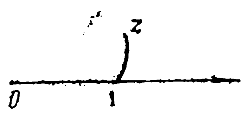
طرح قضیه با این روش دارای همان دقت روشهای دیگر است، با این تفاوت که ساده‌تر و مفهوم‌تر است ، زیرا در این روش اشکال مربوط به اتصال لگاریتم پیش نمی‌آید (ازابتدا به‌عنوان انتگرال، یعنی به عنوان تابع متصلی که نسبت به آوند خود قابل انتگرال‌گیری است، مشخص می‌شود) و اتصال تابع معکوس (تابع نمائی) هم‌بخودی‌خود نتیجه می‌شود .

# ۲

# طرح نظریه در هیئت اعداد مختلط

### تابع لگاریتمی

تــابع $\omega = \int_{1}^{z} \frac{d\xi}{\xi}$ , را درنظر می‌گیریم . ضمناً به عنوان مسیر انتگرال‌گیری می‌توان هرمنحنی را درنظر گرفت که نقطهٔ ۱ را به نقطهٔ z وصل می‌کند (شکل ۹) .




شکل ۹

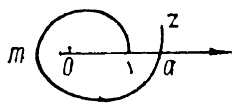
اگر z مساوی عددمثبت‌وحقیقی x ،وپاره خط [x , ۱] ازمحور حقیقی به‌عنوان‌مسیرانتگرال‌گیری باشد،دراین‌صورت$\omega = \ln z$می‌شود.

اگر z عدد مختلط دلخواهی باشد ، طبق تعریف فرض‌می‌کنیم $\omega = \ln z$ .

خواص تابع لگاریتمی را بررسی می‌کنیم .

تابع $\ln z = \int_{۱}^{z} \frac{d\xi}{\xi}$ چند ارزشی است ، یعنی درهر نقطه، دارای مجموعهٔ نامحدودی‌ازمقادیرمختلف است، که متناظر با مسیرهای مختلف انتگرالی است که نقاط ۱ و z را به‌هم وصل می‌کند .

اگر مقدار انتگرال $\int_{۱}^{z} \frac{d\xi}{\xi}$ ، که در امتداد مسیر انتخاب شده است، نقطهٔ صفر را دور نزند به $[\ln z]$ نشان دهیم، در این‌صورت




شکل ۱۰

مقدارهمین انتگرال ، وقتی که یک‌بار درجهت مثبت ، نقطهٔ‌صفررا دور زده باشد (شکل ۱۰) می‌شود :

$$[\ln z] + ۲\pi i$$

زیرا داریم :

$$\int_{۱}^{z} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{۱ma۱} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{۱az} \frac{d\xi}{\xi} = ۲\pi i + [\ln z]$$

دراینجا به‌جای $\int_{۱ma۱} \frac{d\xi}{\xi}$ مقدار $۲\pi i$ گذاشته شده است ، زیرا نقطهٔ

صفر داخل دور بسته قرارگرفته است و بنابراین $\int_{\text{۱ma۱}} \frac{d\xi}{\xi}$ ، که در امتداد این دور انتخاب شده است ، مقدار معین ثابتی دارد ، که به‌شکل این دور بستگی ندارد . برای محاسبهٔ مقدار آن کافی است به‌عنوان دور انتگرالی ، دایره‌ای به‌شعاع دلخواه R ومرکز نقطهٔ صفردرنظربگیریم، در این صورت داریم :

$$\xi = Re^{i\varphi}\ ,\ \ d\xi = Rie^{i\varphi}\, d\varphi$$

و ازآنجا $\frac{d\xi}{\xi} = id\varphi$ می‌شود و بنابراین :

$$\int_{c} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{\circ}^{۲\pi} id\varphi = ۲\pi i$$

عدد بدست آمدهٔ $۲\pi i$ مقدار انتگرال $\int_{\text{۱ma۱}} \frac{d\xi}{\xi}$ می‌باشد .

اگرمسیر انتگرال، k مرتبه درجهت مثبت یا منفی دورنقطهٔ صفر بچرخد ، به مقدار $[\ln z]$ عدد $۲k\pi i$ اضافه (یا کم) می‌شود .

بنابراین به ازای هرمقدار $z(z \neq \circ)$ داریم :

$$\omega = \int_{۱}^{z} \frac{d\xi}{\xi} = \ln z = [\ln z] + ۲k\pi i$$

که درآن k عدد صحیح دلخواهی است .

وقتی‌که z حقیقی ومثبت باشد ، یکی ازمقادیر $[\ln z]$ حقیقی و بقیه موهومی خواهد بود . همین مقدار حقیقی $[\ln z]$ در جبر مقدماتی

درنظر گرفته می‌شود .

به این ترتیب ، تابع $\omega = \ln z$ ، که درتمام صفحهٔ متغیر مختلط $z$ تعریف شده است ، بجز حالت $z = 0$ ، بی‌نهایت ارزشی است .

برای اینکه این تابع را به عنوان یك تابع یك ارزشی مطالعه کنیم ، باید چنان حوزه‌ای را ازصفحه درنظربگیریم ، که در آن نتوان منحنی بسته‌ای را دور نقطهٔ صفر رسم کرد . اگر در ذهن خود ، صفحه را درامتداد محورحقیقی منفی ببریم، هردوربسته‌ای که درچنین‌صفحه‌ای واقع باشد ، شامل نقطهٔ صفر نخواهد بود . در چنین صفحه‌ای تابع $\omega = \ln z$ می‌تواند به عنوان یك تابع ارزشی از متغیر مختلط $z$ مورد مطالعه قرار گیرد .

خواص اصلی تابع لگاریتمی به‌وسیلهٔ قضیهٔ مجموع بیان می‌شود:

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1 \cdot z_2)$$

این تساوی را ، بنا برچند ارزشی بودن لگاریتم ، باید به این ترتیب فهمید: به‌ازای مقادیرمفروض $\ln z_1$ و $\ln z_2$ ، یکی ازمقادیر $\ln(z_1 \cdot z_2)$ مساوی مجموع دولگاریتم اول است .

قضیهٔ مجموع را می‌توان به‌ترتیب زیر اثبات‌کرد :

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln z_1 + \int_1^{z_2} \frac{dt}{t} = \ln z_1 + \int_1^{z_2} \frac{d(z_1 t)}{z_1 t} =$$

$$= \int_1^{z_1} \frac{dt}{t} + \int_{z_1}^{z_1 z_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{z_1 z_2} \frac{dt}{t} = \ln(z_1 \cdot z_2)$$

## تابع نمائی

از تعریف لگاریتم، که به کمك انتگرال داده شد، مستقیماً نتیجه می‌شود که تابع $z=f(\omega)$، عکس تابع لگاریتمی، درمعادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$\frac{df}{d\omega}=f$$

با توجه به این معادله، می‌توان بسط تابع $z=f(\omega)$ را به صورت یك رشتهٔ توانی بدست آورد:

$$z=f(\omega)=۱+\frac{\omega}{۱!}+\frac{\omega^{۲}}{۲!}+\frac{\omega^{۳}}{۳!}+\cdots$$

این رشته به ازای هرمقداری از $\omega$ متقارب است، و بنابراین تابع $z=f(\omega)$ تابعی یك ارزشی است. به این ترتیب تابع $z=f(\omega)$، متعالی است.

ازقضیهٔ مجموع برای لگاریتم، قضیهٔ حاصلضرب برای تابع عکس آن نتیجه می‌شود:

$$\varphi(\omega_{۱})\cdot\varphi(\omega_{۲})=\varphi(\omega_{۱}+\omega_{۲}).$$

از تساوی

$$\ln z=[\ln z]+۲k\pi i,$$

که در آن $k=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots$ است، بدست می‌آید:

$$\varphi(\omega+۲k\pi i)=\varphi(\omega)$$

بنابراین $\varphi(\omega)$ ، تابع متناوب ساده‌ای بادورهٔ تناوب $2\pi i$ است.

با فرض $\omega_1 = 1$ و $\varphi(1) = e$ و انتخاب $\omega_2 = \frac{m}{n}$ ($\frac{m}{n}$ مقداری گویا است)، بر اساس قضیهٔ حاصلضرب بدست می‌آوریم که $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ برابر است با یکی ازمقادیر حقیقی و مثبت n مقدار $\sqrt[n]{e^m}$ . این‌مقدار $\varphi(\omega)$ را به صورت $e^{\frac{m}{n}} = e^{\omega}$ نشان می‌دهیم.

به این ترتیب $e^{\omega}$ تابع یك ارزشی کاملاً معینی می‌شود .

حالا به تعریف تابع $a^{\omega}$ می پردازیم . به این سؤال جواب می‌دهیم که تحت‌عنوان توان $a^{\omega}$ ، وقتی که پایهٔ a دلخواه باشد ، چه تابعی را باید فهمید ؟

تابع $a^{\omega}$ را به تابع $e^{\omega}$ مربوط می‌کنیم ، پایهٔ a را برحسب e می‌نویسیم :

$$a = e^{\ln a} \quad ; \quad \ln a = [\ln a] + 2k\pi i (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$a^{\omega} = (e^{\ln a})^{\omega} = e^{\omega[\ln a]} \cdot e^{2k\pi i \omega}$$

به این ترتیب معنای عبارت کلی به‌صورت $a^{\omega}$ ، که به کمك به توان رساندن و ریشه‌گرفتن بدست آمده است، تنها به‌یك‌تابع‌مربوط نیست ، بلکه به مجموعهٔ نامحدودی تابع از $\omega$ مربوط است که با هم

اختلاف دارند وهریك از آنها یك ارزشی است . ممکن است حالتهای زیر هم پیش آید : اگر $\omega$ عددی صحیح باشد ، همهٔ توابع با هم برابرند ؛ اگر $\omega$ مساوی کسر $\frac{p}{q}$ باشد(دوعدد $p$ و $q$ نسبت به‌هم‌اول‌اند)، دارای $q$ مقدار مختلف برای تابع هستیم ، یعنی :

$$e^{\frac{p}{q}[\ln a]} \cdot e^{۲k\pi i\frac{p}{q}} \quad (k=۰, ۱,۲,\cdots,q-۱)$$

حالا می‌توانیم به سؤالی که درابتدای فصل مطرح کردیم جواب بدهیم : چرا مقادیر اصلی تابع نمائی وقتی که بالای محور $Ox$ قرار دارند ، متعلق به‌یك منحنی متصل‌اند ، در حالی که مقادیر اصلی و منفی این تابع به‌یك منحنی متصل مربوط نیستند ؟

مقادیراصلی ($a^{\frac{p}{q}}$ و $a>۰$ و $۰<$) تابع نمائی امکان‌می‌دهد که از تعداد نامحدود تابع ، یك مقدار تابع :

$$[a^{\omega}] = e^{\omega[\ln a]} ,$$

را جدا کنیم . درحالتی که مقادیر حقیقی و منفی $a^{\frac{p}{q}}$ را درنظر بگیریم ($q$ عددی است زوج) متعلق به بی‌نهایت تابع مختلف خواهند بود و بنابراین همهٔ این مقادیر، همراه بامقادیر انتخابی،نمی‌توانند یك‌منحنی متصل را تشکیل دهند .

# فصل پنجم

## روشهای محاسبهٔ لگاریتمها

# ۱

## روش محاسبهٔ لگاریتمها به کمك رشته

محاسبهٔ لگاریتمها ، بخصوص با دقت زیاد ، برای بسیاری از معلمین و طبعاً بـرای دانش‌آموزان مدارس متوسطه ، مسئله‌ای بغرنج است .

بعضی ازمعلمین گمان می‌کنند که لگاریتمها را تنها می‌توان بـه کمك ریاضیات عالی محاسبه کرد وفراموش می‌کنند که اولین‌جدولهای لگاریتم (نپر ، بورگی و بریگس) باروشهای مقدماتی تنظیم شده‌است.

در این فصل بعضی روشهای محاسبهٔ تقریبی لگاریتمها را مورد

مطالعه قرار می‌دهیم و ابتدا ازمحاسبهٔ لگاریتمها به‌کمك رشته‌ها شروع می‌کنیم . منتهی ، چون این روش برای دانش‌آموزان دبیرستان قابل فهم نیست ، روی روشهای مقدماتی تکیه خواهیم کرد .

به اعتقاد ما ، کافی است که‌ضمن درسها وهنگام تدریس‌لگاریتم، دانش‌آموزان را تنها با یکی از روشهای محاسبهٔ لگاریتمها آشنا کنیم: مثلاً روش نپر یا روش بریگس، البته با تغییر آنها وبه زبان‌اصطلاحات امروزی . بعضی از روشها را هم می‌توان در انجمنهای ریاضی برای دانش‌آموزان شرح داد .

ازجالب‌ترین روشها ، روش ساروس ، روش کسرهای مسلسل و روش دوم بریگس است .

ما ضمن شرح هریك از روشهای محاسبهٔ لگاریتمها ، توضیح می‌دهیم که تا چه حد می‌توان از هریك از آنها استفاده کرد .

قبل ازاینکه به‌مطالعهٔ مستقیم روشهای‌مقدماتی محاسبهٔ لگاریتمها بپردازیم ، متذکر می‌شویم که در حوزهٔ اعداد گویا می‌توان مقدار تقریبی لگاریتم هرعدد مثبت (وحقیقی) را بدست آورد .

به‌کمك‌رشتهٔ لگاریتمی‌می‌توان لگاریتمهارا با هرتقریب دلخواه بدست آورد*. شرح این روش محاسبه را می‌آوریم .

---

* لگاریتمها را به کمك محاسبهٔ تقریبی انتگرال معین هم می‌توان بدست آورد .

از رشتهٔ لگاریتمی شروع می‌کنیم :

$$\ln(۱+x)=\frac{x}{۱}-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots \qquad (۱)$$

رابطهٔ (۱) برای مقادیری از x که در شرط $-۱<x\leqslant۱$ صدق کنند ، صحیح است .

معمولاً برای محاسبهٔ لگاریتمها، از این‌رشته استفاده نمی‌کنند، زیرا این رشته خیلی بکندی به‌تقارب نزدیك می‌شود.مثلاً برای‌محاسبهٔ $\ln ۲$ تا پنج رقم اعشار بـاید در این رشتهٔ لگاریتمی بیش از صد هزار جمله انتخاب کرد .

رشتهٔ (۱) را به رشته‌ای تبدیل می‌کنیم که سریع‌تر به تقارب برسد . در رشتهٔ (۱) ، x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم.عبارتهای $۱+x$ و $۱-x$ مثبت هستند ، بنابراین :

$$\ln(۱-x)=-x-\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}-\cdots \qquad (۲)$$

اگررشتهٔ (۲) را از رشتهٔ (۱) کم‌کنیم بدست می‌آید :

$$\ln(۱+x)-\ln(۱-x)=۲\left(x+\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}+\cdots\right)$$

یـا : $$\ln\frac{۱+x}{۱-x}=۲\left(x+\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}+\cdots\right) \qquad (۳)$$

این رشته با شرط $-۱<x<۱$ صحیح است .

با فرض $x=\frac{1}{2n+1}$ $(n=1,2,3,\dots)$ بدست می‌آید :

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right],(4)$$

به کمك رشتهٔ (۴) می‌توان لگاریتم طبیعی هـر عدد صحیح را محاسبه کرد ، منتهی برای محاسبهٔ لگاریتم هر عدد ، باید لگاریتم عدد قبل از آن را دانست .

مثلاً ، با فرض $n=1$ ، بدست می‌آید :

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^5}+\cdots\right)$$

و یـا :

$$\ln 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 9}+\frac{1}{5\times 9^2}+\cdots\right)\qquad(5)$$

اگر مجموع n جملهٔ اول رشته را $S_n$ بگیریم :

$$S_n=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{3\times 9}+\frac{1}{5\times 9^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)9^{n-1}}\right],$$

وبقیهٔ جملات با شروع ازجملهٔ $(n+1)$ ام را $R_n$ بنامیم :

$$R_n=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)9^n}+\frac{1}{(2n+3)9^{n+1}}+\cdots\right],$$

بدست می‌آید ؛ $\ln 2=S_n+R_n$ .

اگر در $R_n$ مقادیر $2n+1$ ، $2n+3$ ، ... را به $2n+1$ تغییر

دهیم ، کسرها بزرگ می‌شوند وبدست می‌آید :

$$R_n<\frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{۲n+۱}\cdot\frac{۱}{۹^n}+\frac{۱}{۲n+۱}\cdot\frac{۱}{۹^{n+۱}}+\dots\right)$$

و یا :

$$R_n<\frac{۲}{۳(۲n+۱)۹^n}\left(۱+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹^۲}+\dots\right)$$

عبارت $\dots+\frac{۱}{۹^۲}+\frac{۱}{۹}+۱$ مجموع بی‌نهایت جمله از یك تصاعد هندسی نزولی است و بنابراین حاصل آن برابر است با :

$$\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۹}}=\frac{۹}{۸}$$

بنابراین اگر ازجملهٔ $(n+۱)$ ام به‌بعد را حذف کنیم ، خطای حاصل چنین است :

$$R_n<\frac{۲\times۹}{۳(۲n+۱)۹^n\times۸}=\frac{۱}{۱۲(۲n+۱)۹^{n-۱}} \quad (۶)$$

حالا دیگر می‌توان لگاریتم ۲ را با هر تقریب دلخواه بدست آورد . اگر در رشتهٔ (۵) هشت جملهٔ اول را انتخاب کنیم ، ازمجموع، مقداری حذف می‌شود ، که طبق (۶) خواهد بود :

$$\frac{۱}{۱۲\times۱۷\times۹^۷}=\frac{۱}{۹۷۵۷۲۵۶۷۶}<\frac{۱}{۱۰^۸}\ .$$

متذکر می‌شویم که می‌توان رابطه‌ای دقیق‌تر از رابطهٔ (۴) هم

بدست آورد . مثلاً اگر در رابطهٔ (۳) فرض کنیم : $x=\frac{2}{n^3-3n}$ ، بدست می‌آید :

$$\frac{1+\frac{2}{n^3-3n}}{1-\frac{2}{n^3-3n}}=2\left[\frac{2}{n^3-3n}+\frac{8}{3(n^3-3n)^3}+\cdots\right]$$

و یا :

$$\ln\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}=\frac{4}{n^3-3n}+\frac{4^2}{3(n^3-3n)^3}+\cdots$$

اگر فقط جملهٔ اول بسط را درنظر بگیریم ، بدست می‌آوریم :

$$\ln\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}=\frac{4}{n^3-3n}$$

و چون داریم :

$$n^3-3n\pm 2=(n\pm 2)(n\mp 1)^2$$

بدست می‌آید :

$$\ln(n+2)=2\ln(n+1)-2\ln(n-1)+\ln(n-2)+\frac{4}{n^3-3n}$$

اگر $n>10^3$ باشد ، می‌توان با کمك این رابطه ، $\ln(n+2)$ را تا ۲۶ رقم اعشار بدست آورد، بشرطی که لگاریتمهای $n+1$، $n-1$، $n-2$ معلوم باشد .

درحقیقت مقدار خطا کمتر است از (به‌شرط $n>10^3$) :

$$\frac{۴^{۲}}{۳(n^{۳}-۳n)^{۳}}\left[۱+\frac{۴}{(n^{۳}-۳n)^{۲}}+\frac{۴^{۲}}{(n^{۳}-۳n)^{۴}}+\cdots\right]=$$

$$=\frac{۱۶}{۳n(n^{۲}-۴)(n^{۲}-۳)(n^{۲}-۱)^{۲}}<\frac{۱}{۱۰^{۲۶}}$$

حالا رابطه‌ای را ذکر می‌کنیم که‌به‌کمك آن می‌توان‌لگاریتمهای اعشاری را محاسبه‌کرد . برای اینکه به لگاریتم اعشاری برسیم، باید مدول عبور ازدستگاه طبیعی لگاریتمها به دستگاه اعشاری را پیدا کرد.

می‌دانیم‌که $M=\frac{۱}{\ln ۱۰}$؛ $\ln ۱۰$ را بدست می‌آوریم :

برای این منظور در رابطهٔ (۴) ، $n=۴$ می‌گیریم ، بدست می‌آید :

$$\ln ۵=\ln ۴+۲\left(\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۳\times ۹^{۳}}+\frac{۱}{۵\times ۹^{۵}}+\cdots\right),$$

ازطرف دیگر داریم :

$$n۲=\frac{۲}{۳}\left(۱+\frac{۱}{۳\times ۹}+\frac{۱}{۵\times ۹^{۲}}+\frac{۱}{۷\times ۹^{۳}}+\cdots\right),$$

$$\ln ۱۰=\ln ۲+\ln ۵$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$\ln ۱۰=۲\left(۱+\frac{۱}{۳\times ۹}+\frac{۱}{۵\times ۹^{۲}}+\cdots\right)+\frac{۲}{۹}\left(۱+\frac{۱}{۳\times ۸۱}+\frac{۱}{۵\times ۸۱^{۲}}+\cdots\right)$$

در این دو رشته ، مجموع هشت جمله را در نظر می‌گیریم و بدست

می‌آوریم :

$$\ln 10 = 2{,}302585093 \;;\quad M = 0{,}43429448\ldots$$

حالا اگر طرفین رابطهٔ (۴) را در M ضرب کنیم ، می‌شود:

$$\lg(n+1) = \lg n + 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots\right],$$

که برای محاسبهٔ لگاریتمها بـه اندازهٔ کافی ساده است . به کمك این رابطه ، می‌توان جدول لگاریتمها را از ۱ تا $10^5$ محاسبه کرد ، برای این منظور کافی است لگاریتم عددهای از $10^4$ تا $10^5$ رابدست آوریم که ضمناً در رابطه، $n\geqslant 10^4$ است . اگر تنها اولین جملهٔ این رابطه را به حساب آوریم ، مقدار خطا چنین می‌شود :

$$R_n = 2M\left[\frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right] < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n+1)^5} + \cdots\right] = \frac{1}{3(2n+1)^3}\left[1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right]$$

($2M$ را به ۱ و $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{7}$ ، ... را به $\frac{1}{3}$ تبدیل کرده‌ایم) .

عبارت :

$$1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots$$

مجموع بـی‌نهایت جمله از یك تصاعـد هندسی نزولـی است و

بنابراین مجموع آن برابر است با $\frac{(2n+1)^2}{2\times 2n(n+1)}$ . بنابراین وقتی $n=10^4$ باشد داریم :

$$R_n<\frac{(2n+1)^2}{3\times 2\times 2n(n+1)(2n+1)^3}=\frac{1}{12n(n+1)(2n+1)}<$$

$$<\frac{1}{24n^3}<\frac{1}{10^{13}}$$

به این ترتیب ، با بکار بردن رابطهٔ :

$$\lg(n+1)\approx\lg n+\frac{2M}{2n+1}$$

برای محاسبهٔ لگاریتمها ، خطائی کمتر از یك واحد در رقم سیزدهم اعشار پیدا می‌شود .

# ۲

# روشهای مقدماتی برای محاسبهٔ لگاریتمها

درحوزهٔ اعداد گویا ، وقتی که مبنا عددی مثبت باشد،درحالت کلی لگاریتم عدد مثبت مفروض وجود ندارد . ولی می‌توان درحوزهٔ اعداد گویا ، لگاریتم هرعدد مثبت را بطور تقریبی بدست آورد .

فرض کنید بخواهیم مقدار لگاریتم ۳ را (با دقتی که از قبل معین شده است) درمبنای ۱۰ بدست آوریم . اگر توانی از ۱۰ با نمای گویا وجود ندارد که برابر با ۳ باشد،یا به عبارت دیگر،توانی از ۱۰ بانمای صحیح وجود ندارد که برابربا توان صحیحی از ۳ باشد، برای هرعدد

صحیح و مثبت n می‌توان عدد صحیح و مثبت $\alpha$ را چنان پیدا کرد که داشته باشیم ($\alpha$ می‌تواند مساوی صفر باشد):

$$10^{\alpha} < 3^{n} < 10^{\alpha+1}$$

از این نامساویها بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$10^{\frac{\alpha}{n}} < 3 < 10^{\frac{\alpha+1}{n}}$$

یعنی عدد ۳ بین دو توان ۱۰ قرارگرفته است، که توانهای آنها به‌اندازهٔ $\frac{1}{n}$ با هم اختلاف دارند؛ و روشن است که می‌توان با بزرگ کردن n، این اختلاف را به هر اندازه که بخواهیم کوچك کرد. ازطرف دیگر با در دست داشتن عدد مثبت و دلخواه m، همیشه می‌توان عدد صحیح و مثبت $\lambda$ را طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n} < 10 < \left(\frac{\lambda+1}{m}\right)^{n}$$

حالا می‌نویسیم:

$$\left(\frac{\lambda+1}{m}\right)^{n} - \left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n} = \frac{(\lambda+1)^{n}-\lambda^{n}}{m^{n}} = \frac{1}{m^{n}}\Big[n\lambda^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} + \dots\Big] = \frac{n}{m}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n-1}{m}\cdot\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n-2} +$$

$$+\frac{۱}{۳!}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n-۱}{m}\cdot\frac{n-۲}{m}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n-۳}+\cdots$$

چـون $\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n}<۱۰$ می‌باشد، $\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n-۱}<۱۰$ ، $\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n-۲}<۱۰$ وغیره خواهد بود. بنابراین :

$$\left(\frac{\lambda+۱}{m}\right)^{n}-\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n}<۱۰\left(\frac{n}{m}+\frac{۱}{۲!}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n-۱}{m}+\right.$$

$$\left.+\frac{۱}{۳!}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n-۱}{m}\cdot\frac{n-۲}{m}+\cdots\right)$$

بافرض $\frac{۱}{R}=\frac{n}{m}$ ، خواهیم داشت: $\frac{n-۱}{m}<\frac{۱}{R}$ ، $\frac{n-۲}{m}<\frac{۱}{R}$ وغیره . بنابراین :

$$\left(\frac{\lambda+۱}{m}\right)^{n}-\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n}<\frac{۱۰}{R}\left(۱+\frac{۱}{۲!}\cdot\frac{۱}{R}+\frac{۱}{۳!}\cdot\frac{۱}{R^{۲}}+\cdots\right)$$

وقتی‌کـه مقدار $R=\frac{m}{n}$ را به اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب‌کنیم،سمت راست نامساوی ، وبطور بدیهی سمت چپ آن ، می‌تواند از هرعدد دلخواه $\varepsilon$ کوچکتر بشود . اگر فرض‌کنیم :

$$۱۰=\left(\frac{\gamma}{m}\right)^{n}+\delta\Rightarrow\left(۱۰-\delta\right)^{\frac{۱}{n}}=\frac{\lambda}{m}$$

$$۱۰=\left(\frac{\lambda+۱}{m}\right)^{n}-\delta'\Rightarrow\left(۱۰+\delta'\right)^{\frac{۱}{n}}=\frac{\lambda+۱}{m}$$

می‌توان با بزرگ کردن $R=\frac{m}{n}$ ، ترتیبی داد که هم $\delta$ و هم $\delta'$ از

هر عدد دلخواه کوچکی مثل ε کوچکتر باشند .

از نامساویهای $10^{\alpha} < 2^{n} < 10^{\alpha+1}$ نتیجه می‌شود :

$$(10-\delta)^{\alpha} < 2^{n} < (10+\delta')^{\alpha+1},$$

$$(10-\delta)^{\frac{\alpha}{n}} < 2 < (10+\delta')^{\frac{\alpha+1}{n}},$$

$$(10-\delta)^{\frac{\alpha}{n}} = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\alpha}, \quad (10+\delta')^{\frac{\alpha+1}{n}} = \left(\frac{\lambda+1}{m}\right)^{\alpha+1}$$

و تفاضل آنها :

$$(10+\delta')^{\frac{\alpha+1}{n}} - (10-\delta)^{\frac{\alpha}{n}} = (10-\delta)^{\frac{\alpha}{n}} \times$$

$$\times\left[\left(\frac{10+\delta'}{10-\delta}\right)^{\frac{\alpha}{n}}(10-\delta')^{\frac{1}{n}} - 1\right] <$$

$$< (10-\delta)\left[\frac{10+\delta}{10-\delta}(10+\delta')^{\frac{1}{n}} - 1\right],$$

وچون $1 > \frac{\alpha}{n}$ است ، این تفاضل کوچکتر است از:

$$10\left[\frac{10+\varepsilon}{10-\varepsilon}(10+\delta')^{\frac{1}{n}} - 1\right]$$

اگر n را به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم ، قبل از همه می‌توانیم مقدار $(10+\delta')^{\frac{1}{n}}$ را به‌هر اندازه که بخواهیم، به واحد نزدیک کنیم.

سپس اگر عدد $R=\frac{m}{n}$ را به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم ، $\varepsilon$ و بنابراین اختلاف کسر $\frac{10+\varepsilon}{10-\varepsilon}$ و واحد به اندازهٔ دلخواه کوچک می‌شود . به _ ترتیب با انتخاب n و $\frac{m}{n}$ ، سمت راست نامساوی اخیر و بنابراین $(10+\delta')^{\frac{\alpha+1}{n}}-(10-\delta)^{\frac{\alpha}{n}}$ کوچکتر از عدد $\eta$ (که به دلخواه کوچک است) می‌شود .

حالا اگر فرض کنیم :

$$3-(10-\delta)^{\frac{\alpha}{n}}= \quad ,(10+\delta')^{\frac{\alpha+1}{n}}-3=\xi'$$

خواهیم داشت : $<\eta$ , $\xi'<\eta$ .

تساویهای

$$3-\xi=(10-\delta)^{\frac{\alpha}{n}},\ 3+\xi'=(10+\delta')^{\frac{\alpha+1}{n}}$$

ثابت می‌کند که اگر لگاریتم عدد ۳ درمبنای ۱۰ ، درحوزهٔ اعدادگویا، وجود ندارد ، درعوض می‌توان دو کسر گویای $\frac{\alpha}{n}$ و $\frac{\alpha+1}{n}$ را بدست آورد ، بطوری‌که لگاریتمهای دقیق عددهائی (که با عدد ۳ کمتر از $\eta$ اختلاف دارند) درمبناهائی هستند که با مبنای ۱۰ کمتر از $\varepsilon$ اختلاف دارند . بنابراین یکی ازدوعدد $\frac{\alpha}{n}$ و $\frac{\alpha+1}{n}$ را ، که اختلافی مساوی $\frac{1}{n}$ دارند و با انتخاب n می‌توان اختلاف را به اندازهٔ کافی کوچك کرد ، به عنوان لگاریتم عدد ۳ درمبنای ۱۰ به حساب آورد . درعمل، وقتی که لگاریتم عدد مثبتی را حساب می‌کنیم ، همیشه عدد گویائی را درنظر می‌گیریم که به‌طریق مذکور بدست می‌آید .

اکنون به‌بررسی روشهای مقدماتی‌محاسبهٔ لگاریتمها می‌پردازیم.

## روش نپر

نپر برای محاسبهٔ لگاریتم، دو روش عرضه می‌کند . ما یکی از این روشها را که به‌وسیلهٔ لبه‌دینتسو تکمیل شده است ، مورد بررسی قرار می‌دهیم .

این روش محاسبهٔ لگاریتمها براین اساس قرار دارد: برای‌اینکه

لگاریتم اعشاری عدد a را با تقریب $\frac{1}{n}$ بدست آوریم (a و n عددهای صحیح ومثبتی هستند) ، کافی است بدانیم که عدد $a^n$ بین کدام دو توان صحیح متوالی عدد ۱۰ قرار دارد . در حقیقت اگر نامساویهای

$$10^x < a^n < 10^{x+1}$$

را داشته باشیم ، از آنها نتیجه می‌شود :

$$10^{\frac{x}{n}} < a < 10^{\frac{x+1}{n}}$$

بنابراین لگاریتم مجهول با $\frac{1}{n}$ تقریب (نقصانی) برابر است با $\frac{x}{n}$.

با این روش $\lg 3$ را با $\frac{1}{100}$ تقریب بدست می‌آوریم . برای این منظور باید بدانیم که عدد $3^{100}$ بین کدام دو توان صحیح متوالی ۱۰ قرار گرفته است .

با ضرب مستقیم بدست می‌آید :

$$3^5 = 243 \ , \ 3^{10} = 243^2 = 59049$$

از اینجا روشن است که عدد $3^{10}$ بین ۵۹۰۰۰ و ۶۰۰۰۰ قرار گرفته است یا

$$59 \times 10^3 < 3^{10} < 60 \times 10^3$$

هریك از این عددها را مجذور می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$۳۴۸۱ \times ۱۰^{۶} < ۳^{۲۰} < ۳۶۰۰ \times ۱۰^{۶} \qquad (۷)$$

و یا : $$۳۴ \times ۱۰^{۸} < ۳^{۲۰} < ۳۶ \times ۱۰^{۸}$$

دوباره هریك ازعددها را مجذور می‌کنیم :

$$۱۱۵۶ \times ۱۰^{۱۶} < ۳^{۴۰} < ۱۲۹۶ \times ۱۰^{۱۶}$$

و یا : $$۱۱ \times ۱۰^{۱۸} < ۳^{۴۰} < ۱۳ \times ۱۰^{۱۸}$$

بازهم عددها را مجذور می‌کنیم :

$$۱۲۱ \times ۱۰^{۳۶} < ۳^{۸۰} < ۱۶۹ \times ۱۰^{۳۶} \qquad (۸)$$

با ضرب نامساویهای (۷) و (۸) دریکدیگر بدست می‌آید :

$$۱۰^{۳} \times ۱۰^{۴۴} < ۳^{۱۰۰} < ۱۰^{۴} \times ۱۰^{۴۴}$$

یـا : $$۱۰^{۴۷} < ۳^{۱۰۰} < ۱۰^{۴۸}$$

و از آنجا : $$۱۰^{۰٫۴۷} < ۳ < ۱۰^{۰٫۴۸}$$

بنابراین با ۰٫۰۱ تقریب داریم : $g۳ = ۰٫۴۷$ .

$lg۳$ را تـا $\frac{۱}{۱۰^{۵}}$ تقریب هم پیدا می‌کنیم قبلاً $۳^{۱۰} = ۵۹۰۴۹$ را بدست‌آوردیم . سپس بدست می‌آید :

$$۳^{۲۰} = ۵۹۰۴۹^{۲} = ۳۴۸۶۷۸۴۴۰۱$$

سپس به ترتیب نامساویهای زیر را بدست می‌آوریم :

$$۳۴۸۶۷۸ \times ۱۰^{۴} < ۳^{۲۰} < ۳۴۸۶۷۹ \times ۱۰^{۴}$$
$$۱۲۱۵۷۶ \times ۱۰^{۱۴} < ۳^{۴۰} < ۱۲۱۵۷۸ \times ۱۰^{۱۴}$$
$$۱۴۷۸۰۷ \times ۱۰^{۴۳} < ۳^{۸۰} < ۱۴۷۸۱۳ \times ۱۰^{۳۳}$$
$$۵۱۵۳۷ \times ۱۰^{۴۳} < ۳^{۱۰۰} < ۵۱۵۴۰ \times ۱۰^{۴۳}$$
$$۲۶۵۶ \times ۱۰^{۹۲} < ۳^{۲۰۰} < ۲۶۵۷ \times ۱۰^{۹۲}$$
$$۷۰۵۴ \times ۱۰^{۱۸۷} < ۳^{۴۰۰} < ۷۰۶۰ \times ۱۰^{۱۸۷}$$
$$۴۹۷۵ \times ۱۰^{۳۷۸} < ۳^{۸۰۰} < ۴۹۸۵ \times ۱۰^{۳۷۸}$$
$$۱۳۲۱ \times ۱۰^{۴۷۴} < ۳^{۱۰۰۰} < ۱۳۲۵ \times ۱۰^{۴۷۴}$$
$$۱۷۴۵ \times ۱۰^{۹۵۱} < ۳^{۲۰۰۰} < ۱۷۵۶ \times ۱۰^{۹۵۱}$$
$$۳۰۴ \times ۱۰^{۱۹۰۶} < ۳^{۴۰۰۰} < ۳۰۹ \times ۱۰^{۱۹۰۶}$$
$$۹۲۴ \times ۱۰^{۳۸۱۴} < ۳^{۸۰۰۰} < ۹۵۵ \times ۱۰^{۳۸۱۴}$$
$$۱۶۱ \times ۱۰^{۴۷۶۹} < ۳^{۱۰۰۰۰} < ۱۶۸ \times ۱۰^{۴۷۶۹}$$
$$۲۵۹ \times ۱۰^{۹۵۴۰} < ۳^{۲۰۰۰۰} < ۲۸۲ \times ۱۰^{۹۵۴۰}$$
$$۶۷ \times ۱۰^{۱۹۰۸۳} < ۳^{۴۰۰۰۰} < ۸۰ \times ۱۰^{۱۹۰۸۳}$$
$$۴۴ \times ۱۰^{۳۸۱۶۸} < ۳^{۸۰۰۰۰} < ۶۴ \times ۱۰^{۳۸۱۶۸}$$
$$۱۰^{۴۷۷۱۲} < ۳^{۱۰۰۰۰۰} < ۱۰^{۴۷۷۱۳}$$

بنابراین $\lg ۳ = ۰,۴۷۷۱۲$ با تقریب $\frac{۱}{۱۰^{۵}}$ .

متذکر می‌شویم که برای انجام عملیات باید از روشهای تقریبی و محاسبات ساده شده استفاده کرد . همچنین مثلا برای محاسبهٔ $\lg ۵۱$، بهتر است $\lg ۵,۱$ را محاسبه کرد (مانتیسهای این دوعدد برابرند) .

وقتی که لگاریتمها را با این روش محاسبه می‌کنیم ، بـرای تعیین تعداد ارقام $a^n$ می‌توان ازقانون زیر استفاده کرد : تعداد رقمهای حاصلضرب یا برابر است با مجموع تعداد رقمهای عوامل ضرب و یا یك واحد کمتر ازمجموع رقمهای عوامل .

بـرای مجذور یك عدد ، یا تعداد رقمها مساوی دو برابر تعداد رقمهای عدد است و یا یك واحد کمتر از آن .

با استفاده از این قـاعده ، می‌توان محاسبه را طبق طرح زیـر انجام داد :

| | |
|---|---|
| $۰<x<۱$ | $۱۰^{x}=۳$ |
| $۰<۲x<۱$ | $۱۰^{۲x}=۹$ |
| $۱<۴x<۲$ | $۱۰^{۴x}=۸۱$ |
| $۳<۸x<۴$ | $۱۰^{۸x}=۶۵۶۱$ |
| $۷<۱۶x<۸$ | $۱۰^{۱۶x}=۴۳۰۴۶۷۲۱$ |
| $۱۵<۳۲x<۱۶$ | $۱۰^{۳۲x}=۱۸۵۳۰۲\ldots$ (۱۶ رقم) |
| $۳۰<۶۴x<۳۱$ | $۱۰^{۶۴x}=۳۴۳۳۶۸\ldots$ (۳۱ رقم) |
| ............ | ............ |
| $۹۷۷<۲۰۴۸x<۹۷۸$ | $۱۰^{۲۰۴۸x}=۱۳۹۴۲۱\ldots$ (۹۷۸ رقم) |
| $۰<x<۰{,}۵$ | $۰<x<\frac{۱}{۲}$ |

| | |
|---|---|
| $۰,۲۵<x<۰,۵$ | $\frac{۱}{۴}<x<\frac{۱}{۲}$ |
| $۰,۳۷۵<x<۰,۵$ | $\frac{۳}{۸}<x<\frac{۱}{۲}$ |
| $۰,۴۳۷۵<x<۰,۵$ | $\frac{۷}{۱۶}<x<\frac{۱}{۲}$ |
| $۰,۴۶۸۷۵<x<۰,۵$ | $\frac{۱۵}{۳۲}<x<\frac{۱}{۲}$ |
| $۶۴۶۸۷۵<x<۰,۴۸۴۳۷۵$ | $\frac{۱۵}{۳۲}<x<\frac{۳۱}{۶۴}$ |
| $۰,۴۷۷۰۵۱<x<۰,۴۷۷۵۳۹$ | $\frac{۹۷۷}{۲۰۴۸}<x<\frac{۴۸۹}{۱۰۲۴}$ |

برای اینکه درمحاسبهٔ لگاریتمها ، وقت زیادی‌گرفته نشود، آنها را با ۰٫۰۱ یا ۰٫۰۰۱ تقریب‌محاسبه‌کنید والبته بهتر است‌که‌عددهای بزرگ هم انتخاب نشود .

## روش اول بریگس (شکل تغییریافتهٔ آن)

بریگس ، برای اینکه لگاریتم طبیعی ۱۰ را بدست آورد ، ۵۴ مرتبه بطور متوالی ازعدد ۱۰ جذر می‌گیرد و جدول مربوطه را تشکیل می‌دهد . با استفاده از این جدول و با روشهای مقدماتی ، می‌توان لگاریتم اعشاری را محاسبه‌کرد .

محتوی این روش چنین است : باید عدد را (که لگاریتم آن مورد نظر است) به صورت توانی با پایهٔ ۱۰ بنویسیم، برای این‌منظور می‌توان ازجدول $\sqrt[n]{۱۰}$ $(n = ۲,۴,۸,۱۶,\ldots)$ استفاده کرد. دراین‌صورت لگاریتم عدد ، که به صورت حاصلضرب توانهای ۱۰ با نماهای کسری $\frac{۱}{۲^n}$ درآمده است ، بدست می‌آید .

قبل از اینکه‌نمونه‌ای ازمحاسبهٔ‌لگاریتمها را با این روش‌بدهیم، قسمتی ازجدول $\sqrt[n]{۱۰}$ را می‌آوریم :

$$\sqrt{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰^{۰٫۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰} = ۳٫۱۶۲۲۷۷۶۶۰$$

$$\sqrt[۴]{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۴}} = ۱۰^{۰٫۲۵۰۰۰۰۰۰۰۰} = ۱٫۷۷۸۲۷۹۴۱۰$$

$$\sqrt[۸]{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۸}} = ۱۰^{۰٫۱۲۵۰۰۰۰۰۰۰} = ۱٫۳۳۳۵۲۱۴۳۲$$

$$\sqrt[۱۶]{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۱۶}} = ۱۰^{۰٫۰۶۲۵۰۰۰۰۰۰} = ۱٫۱۵۴۷۸۱۹۸۵$$

$$\sqrt[۳۲]{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۳۲}} = ۱۰^{۰٫۰۳۱۲۵۰۰۰۰۰} = ۱٫۰۷۴۶۰۷۸۲۸$$

$$۱۰^{۰٫۰۱۵۶۲۵۰۰۰۰} = ۱٫۰۳۶۶۳۲۹۲۸$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۷۸۱۲۵۰۰} = ۱٫۰۱۸۱۵۱۷۲۲$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۳۹۰۶۲۵۰} = ۱٫۰۰۹۰۳۵۴۰۵$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۱۹۵۳۱۲۵} = ۱٫۰۰۴۵۰۷۳۶۴$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۹۷۶۵۶۳} = ۱٫۰۰۲۲۵۱۱۴۸$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۴۸۸۲۸۱} = ۱٫۰۰۱۱۲۴۹۴۱$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۲۴۴۱۴۱} = ۱٫۰۰۰۵۶۲۳۱۳$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۱۲۲۰۷۰} = ۱٫۰۰۰۲۸۱۱۱۷$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۶۱۰۳۵} = ۱٫۰۰۰۱۴۰۵۹۹$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۳۰۵۱۸} = ۱٫۰۰۰۰۷۰۲۷۲$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۱۵۲۵۹} = ۱٫۰۰۰۰۳۵۱۳۵$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۰۷۶۲۹} = ۱٫۰۰۰۰۱۷۵۶۸$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۳۸۱۵} = ۱٫۰۰۰۰۰۸۷۸۴$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۰۱۹۰۷} = ۱٫۰۰۰۰۰۴۳۹۲$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۰۰۹۵۴} = ۱٫۰۰۰۰۰۲۱۹۶$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۰۰۴۷۷} = ۱٫۰۰۰۰۰۱۰۹۸$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۰۰۲۳۸} = ۱٫۰۰۰۰۰۰۵۴۹$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۰۰۱۱۹} = ۱٫۰۰۰۰۰۰۲۷۵$$

$$۱۰^{۰٫۰۰۰۰۰۰۰۶۰} = ۱٫۰۰۰۰۰۰۱۳۷$$

به کمك این جدول می‌توان لگاریتم عددها را تا هشت رقم اعشار بدست آورد .

به‌عنوان مثال $\lg ۲$ را با سه رقم مانتیس بدست می‌آوریم .

ازجدول عدد ۱٫۷۷۸ را ، که نزدیکترین عدد به ۲ می‌باشد ، انتخاب می‌کنیم . فرض می‌کنیم :

$$۲ = ۱,۷۷۸x,$$

$$۲ \# ۱۰^{۰,۲۵۰} \times ۱,۱۲۵ ,$$

برای عدد ۱,۱۲۵ دوباره ازجدول استفاده می‌کنیم :

$$۱,۱۲۵ = ۱,۰۷۵x_{۱} ,$$

$$۱,۱۲۵ \# ۱۰^{۰,۰۳۱} \times ۱,۰۴۶ ,$$

$$۱,۰۴۶ = ۱,۰۳۷x_{۲} ,$$

$$۱,۰۴۶ \# ۱۰^{۰,۰۱۶} \times ۱,۰۰۹ ,$$

$$۱,۰۰۹ \# ۱۰^{۰,۰۰۴}$$

$$۲ \# ۱۰^{۰,۲۵۰} \times ۱۰^{۰,۰۳۱} \times ۱۰^{۰,۰۱۶} \times ۱۰^{۰,۰۰۴} = ۱۰^{۰,۳۰۱}$$

$$\lg ۲ \# ۰,۳۰۱$$

متذکر می‌شویم که برای محاسبهٔ لگاریتمها با این روش ، می‌توان جدول $\sqrt[n]{۱۰}$ را به‌طریق دیگری آماده کرد (جدول صفحهٔ ۲۱۰ را ببینید).

به‌کمك این‌جدول می‌توان‌لگاریتم عددها را تاحداکثر پنج رقم مانتیس حساب کرد . برای اینکه تعداد بیشتری از رقمهای مانتیس را

| عدد | نمای توان ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^{0.1}$ | ۱٫۲۵۸۹۳ | ۱٫۵۸۴۸۹ | ۱٫۹۹۵۲۶ | ۲٫۵۱۱۸۹ | ۳٫۱۶۲۲۹ | ۳٫۹۸۱۰۷ | ۵٫۰۱۱۸۷ | ۶٫۳۰۹۵۷ | ۷٫۹۴۳۲۸ |
| $10^{0.01}$ | ۱٫۰۲۳۳۱ | ۱٫۰۴۷۱۳ | ۱٫۰۷۱۵۲ | ۱٫۰۹۶۴۸ | ۱٫۱۲۲۰۲ | ۱٫۱۴۸۱۵ | ۱٫۱۷۴۹۰ | ۱٫۲۰۲۲۷ | ۱٫۲۳۰۲۷ |
| $10^{0.001}$ | ۱٫۰۰۲۳۱ | ۱٫۰۰۴۶۲ | ۱٫۰۰۶۹۳ | ۱٫۰۰۹۲۵ | ۱٫۰۱۱۵۸ | ۱٫۰۱۳۹۹ | ۱٫۰۱۶۲۵ | ۱٫۰۱۸۵۹ | ۱٫۰۲۰۹۴ |
| $10^{0.0001}$ | ۱٫۰۰۰۲۳ | ۱٫۰۰۰۴۶ | ۱٫۰۰۰۶۹ | ۱٫۰۰۰۹۲ | ۱٫۰۰۱۱۵ | ۱٫۰۰۱۳۸ | ۱٫۰۰۱۶۱ | ۱٫۰۰۱۸۹ | ۱٫۰۰۲۰۷ |
| $10^{0.00001}$ | ۱٫۰۰۰۰۲ | ۱٫۰۰۰۰۴ | ۱٫۰۰۰۰۶ | ۱٫۰۰۰۰۹ | ۱٫۰۰۰۱۲ | ۱٫۰۰۰۱۴ | ۱٫۰۰۰۱۶ | ۱٫۰۰۰۱۹ | ۱٫۰۰۰۲۱ |

بدست آوریم ، باید جدول را بـا تعداد بیشتری از رقمهای اعشاری تشکیل داد .

$\lg ۲$ را محاسبه می‌کنیم . ابتدا $\lg ۲$ را بـا دو رقـم مانتیس محاسبه می‌کنیم :

$$۲ \approx ۱,۵۸ \times ۱,۲۶ \approx ۱۰^{۰/۲۰} \times ۱۰^{۰/۱۰} = ۱۰^{۰/۳۰} \; ; \; \lg ۲ \approx {}^{۰/۳۰}$$

سپس $\lg ۲$ را تا سه رقم مانتیس بدست می‌آوریم :

$$۲ \approx ۱,۹۹۵ \times ۱,۰۰۲ \approx ۱۰^{۰,۳۰۰} \times ۱۰^{۰,۰۰۱} = ۱۰^{۰,۳۰۱} \; ;$$

$$\lg ۲ \approx ۰,۳۰۱$$

و بعد تا چهار رقم مانتیس :

$$۲ \approx ۱,۹۹۵۳ \times ۱,۰۰۲۴ \approx ۱۰^{۰,۳۰۰۰} \times ۱۰^{۰,۰۰۱} = ۱۰,^{۳۰۱۰} \; ;$$

$$\lg ۲ \approx ۰,۳۰۱۰$$

وحالا با پنج رقم مانتیس :

$$۲ = ۱,۹۹۵۲۶ x \; ;$$

$$۲ \approx ۱۰^{۰,۳} \times ۱,۰۰۲۳۸ \; ;$$

$$۱,۰۰۲۳۸ = ۱,۰۰۲۳۱ x_۱ \; ;$$

$$۱,۰۰۲۳۱ \approx ۱۰^{۰,۰۰۱} \times ۱,۰۰۰۰۷ \approx ۱۰^{۰,۰۰۱} \times ۱۰^{۰,۰۰۰۳}$$

$$۲ \approx ۱۰^{۰,۳} \times ۱۰^{۰,۰۰۱} \times ۱۰^{۰,۰۰۰۰۳} = ۱۰^{۰,۳۰۱۰۳} \; ;$$

$$\lg ۲ \approx ۰,۳۰۱۰۳$$

همانطور که دیده می‌شود ، این روش محاسبهٔ لگاریتمها ، برای دانش‌آموزان دبیرستان ساده ، قابل فهم و قانع‌کننده است . برای این منظور تنهالازم است که‌از جدول آماده‌ای استفاده کنند (یکی‌ازدوجدولی که آوردیم وبهتر است که جدول اول باشد) .

یادآوری می‌کنیم که **لباچوسکی** ، ریاضی‌دان بزرگ روس هم برای محاسبهٔ لگاریتم عدد ۲ ، ازهمین‌روش استفاده کرده است.قسمتی از یادداشت او را در اینجا می‌آوریم :

«... می‌توان دید که جدولهای لگاریتم ، محاسبات را فوق‌العاده ساده می‌کنند . برای تشکیل خود جدولها راههای مختلفی وجود دارد که ازبین آنها حکم مقالهٔ ۱۷۵ است که امکان تعیین لگاریتم هرعدد را به‌صورت ساده وبی‌نظیری اثبات می‌کند ، به این ترتیب که به‌جای جستجوی قسمت اعشاری درنما ، ازجذرهای متوالی استفاده‌کنیم .

درجدولی که تشکیل می‌دهیم ، درسمت چپ جذرهای متوالی عدد ۱۰ می‌نویسیم و درسمت راست و روبروی آنها ، نماهای متناظر عدد ۱۰ ، یعنی مبنای لگاریتم ، را .

| | |
|---|---|
| ۱ | ۱۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰ |
| ۰,۵ | ۳,۱۶۲۲۷۷۶۶۰ |
| ۰,۲۵ | ۱,۷۷۸۲۷۹۴۱۰ |
| ۰,۱۲۵ | ۱,۳۳۳۵۲۱۴۳۲ |
| ۰,۰۶۲۵ | ۱,۱۵۴۷۸۱۹۸۵ |
| ۰,۰۳۱۲۵ | ۱,۰۷۴۶۰۷۸۲۸ |
| ۰,۰۱۵۶۲۵ | ۱,۰۳۶۶۳۲۹۲۸ |
| ۰,۰۰۷۸۱۲۵ | ۱,۰۱۸۱۵۱۷۲۲ |
| ۰,۰۰۳۹۰۶۲۵ | ۱,۰۰۹۰۳۵۴۰۵ |
| ۰,۰۰۱۹۵۳۱۲۵ | ۱,۰۰۴۵۰۷۳۶۴ |
| ۰,۰۰۰۹۷۶۵۶۲۵ | ۱,۰۰۲۲۵۱۱۴۸ |
| ۱,۰۰۰۴۸۸۲۸۶ | ۱,۰۰۱۱۲۴۹۴۱ |
| ۰,۰۰۰۲۴۴۱۴۳ | ۱,۰۰۰۵۶۲۳۱۳ |
| ۰,۰۰۰۱۲۲۰۷۱ | ۱,۰۰۰۲۸۱۱۱۷ |
| ۰,۰۰۰۰۶۱۰۳۵ | ۱,۰۰۰۱۴۰۵۹۹ |
| ۰,۰۰۰۰۳۰۵۱۸ | ۱,۰۰۰۰۷۰۲۷۲ |
| ۰,۰۰۰۰۱۵۲۵۹ | ۱,۰۰۰۰۳۵۱۳۶ |
| ۰,۰۰۰۰۰۷۶۳۰ | ۱,۰۰۰۰۱۷۵۶۷ |
| ۰,۰۰۰۰۰۳۸۱۵ | ۱,۰۰۰۰۰۸۷۸۴ |
| ۰,۰۰۰۰۰۱۹۰۷ | ۱,۰۰۰۰۰۴۳۹۲ |
| ۰,۰۰۰۰۰۰۹۵۳ | ۱,۰۰۰۰۰۲۱۹۶ |
| ۰,۰۰۰۰۰۰۴۷۷ | ۱,۰۰۰۰۰۱۰۹۸ |
| ۰,۰۰۰۰۰۰۲۳۸ | ۱,۰۰۰۰۰۰۵۴۹ |
| ۰,۰۰۰۰۰۰۱۱۹ | ۱,۰۰۰۰۰۰۲۷۴ |

حالا فرض کنید که بخواهیم لگاریتم عدد $۱۰ > a > ۱$ را پیدا کنیم.

اگر عدد $a$ مساوی یکی از عددهای سمت چپ در جدول فوق باشد، در این صورت:

$$\log a = ۲^{-n}$$

که در آن $n$ عدد صحیح و مثبتی است. اگر عدد $a$ بین دو جذر متوالی باشد، در این صورت:

$$۲^{-n} < \log a < ۲^{-n+۱}$$

و بنابراین:

$$\log a = ۲^{-n} + \log\left(a \times ۱۰^{-۲^{-n}}\right)$$

در اینجا هم عدد $a' = a \times ۱۰^{-۲^{-n}}$ از واحد بزرگتر است، زیرا $\log a > ۲^{-n}$ بود، دوباره یا داریم:

$$\log a' = ۲^{-m}$$

و یا

$$\log a' = ۲^{-m} + \log\left(a' \times ۱۰^{-۲^{-m}}\right)$$

که در آن عدد صحیح $m > n$ است، زیرا:

$$۲^{-n+۱} > ۲^{-n} + ۲^{-m} + \log\left(a' \times ۱۰^{-۲^{-m}}\right),$$

$$\log\left(a' \times ۱۰^{-۲^{-m}}\right) > ۰$$

اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم . یا بدست می‌آید :

$$\log a = ۲^{-n} + ۲^{-m} + ۲^{-r} + \dots + ۲^{-p}$$

و یا :

$$\log a > ۲^{-n} + ۲^{-m} + ۲^{-r} + \dots + ۲^{-p}$$

$$\log a < ۲^{-n} + ۲^{-m} + ۲^{-r} + \dots + ۲^{-p+۱}$$

که در آن $m > n$ ، $r > m$ ، ... عددهائی صحیح‌اند . اگر به این‌ترتیب $\log a$ با دقت پیدا نشود ، لااقل می‌توان نمای آخر $p$ را بقدرکافی بزرگ گرفت و بنابراین با قبول این و یا آن مقدار برای $\log a$ ، خطائی کمتر از $۲^{-p}$ داشته باشیم .

وقتی‌که $a > ۱۰$ باشد،عدد صحیح ومثبت $u$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $۱ < a \times ۱۰^{-u} < ۱۰$ باشد و $\log(a \times ۱۰^{-u})$ را پیدا می‌کنیم ، در این صورت :

$$\log a = u + \log(a \times ۱۰^{-u})$$

به عنوان مثال $\log ۱۰۲۴$ را پیدا می‌کنیم :

$$\log ۱۰۲۴ = ۳ + \log ۱{,}۰۲۴$$

$$\frac{۱{,}۰۲۴}{۱{,}۰۱۸۱۵۱۷۲۲} = ۱{,}۰۰۵۷۴۴۰۱۳$$

$$\frac{۱{,}۰۰۵۷۴۴۰۱۳}{۱{,}۰۰۴۵۰۷۳۶۴} = ۱{,}۰۰۱۲۳۱۰۹۸$$

$$\frac{۱{,}۰۰۱۲۳۱۰۹۸}{۱{,}۰۰۱۱۲۴۹۴۱} = ۱{,}۰۰۰۱۰۶۰۳۸$$

$$\frac{۱,۰۰۰۱۰۶۰۳۸}{۱,۰۰۰۰۷۰۲۷۲}=۱,۰۰۰۰۳۵۷۶۴$$

$$\frac{۱,۰۰۰۰۳۵۷۶۴}{۱,۰۰۰۰۳۵۱۳۵}۱,۰۰۰۰۰۰۶۲۹$$

$$\frac{۱,۰۰۰۰۰۰۶۲۹}{۱,۰۰۰۰۰۰۵۴۹}=۱,۰۰۰۰۰۰۰۸۰$$

$$\frac{۱,۰۰۰۰۰۰۰۸۰}{۱,۰۰۰۰۰۰۰۶۹}=۱,۰۰۰۰۰۰۰۱۱$$

$$\frac{۱,۰۰۰۰۰۰۰۱۱}{۱,۰۰۰۰۰۰۰۰۹}=۱,۰۰۰۰۰۰۰۰۲$$

نماهای متناظر با مخرجها را (درجدول قبل) با هم جمع می‌کنیم:

۰,۰۰۷۸۱۲۵

۰,۰۰۱۹۵۳۱۲۵

۰,۰۰۰۴۸۸۲۸۶

۰,۰۰۰۰۳۰۵۱۸

۰,۰۰۰۰۱۵۲۵۹

۰,۰۰۰۰۰۰۲۳۸

۰,۰۰۰۰۰۰۰۳۰

۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۴

۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۱

---

$\log ۱,۰۲۴=۰,۰۱۰۲۹۹۹۶۰$

$\log ۱۰۲۴=۳,۰۱۰۲۹۹۹۶$

عدد ۱۰۲۴ برابر است با $۲^{۱۰}$ و بنابراین : $log ۲ = ۰,۳۰۱۰۲۹۹۹۶$

## روش دوم بریگس (با تغییر)

برای محاسبهٔ لگاریتمها با سه رقم مانتیس ، می‌توان از یکی از روشهائی استفاده کرد که بریگس برای ساده کردن کارهای محاسبه‌ای در تشکیل جدولهای لگاریتمی خودش بکار می‌برد . مثلاً $\lg ۲$ را بدست می‌آوریم . تساوی $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ را درنظر می‌گیریم. با لگاریتم گرفتن از این تساوی بدست می‌آید $۱۰ \lg ۲ = \lg ۱۰۲۴$ و از آنجا :

$$\lg ۲ = \frac{\lg ۱۰۲۴}{۱۰}$$

با تقریب دو رقم اعشار می‌توان $\lg ۱۰۲۴$ را مساوی $\lg ۱۰۰۰$ دانست و در این‌صورت $\lg ۲ = ۰٫۳۰$ می‌شود . خطائی که برای تبدیل عدد ۱۰۰۰ به ۱۰۲۴ بدست می‌آید برابر است با ۰٫۰۲۴ از ۱۰۰۰.

حالا این مطلب را درنظر می‌گیریم که افزایش لگاریتم را (وقتی که بزرگ نباشد) می‌توان متناسب با افزایش عدد به حساب آورد .

با توجه به این حکم باید نتیجهٔ تقریبی ۰٫۳۰ را با اضافه کردن $\frac{۱}{۱۰}$ مقدار آن تصحیح کرد : ۰٫۰۲۴ از

$$۰,۳۰ \times ۰,۰۰۲۴ = ۰,۰۰۰۷۲۰ \neq ۰,۰۰۱$$

و از آنجا : $\lg ۲ = ۰,۳۰ + ۰,۰۰۱ = ۰,۳۰۱$

به‌همین ترتیب می‌توان $\lg ۳$ را محاسبه کرد، منتهی دراینجاباید از تساوی ۸۱ = ۳$^{۴}$ شروع کرد .

لگاریتم ۵ بسادگی بدست می‌آید ، زیرا داریم :

$$\lg ۵ = \lg ۱۰ - \lg ۲ = ۱ - ۰,۳۰۱ = ۰,۶۹۹$$

برای پیدا کردن $\lg ۷$ ، بـریگس از تساوی ۲۴۰۱ = ۷$^{۴}$ استفاده کرد .

بـرای اینکه $\lg$ ۱۱ را بدست آوریم ، بـاید از تساویهـای ۹۸۰۱ = ۹۹$^{۲}$ و یا ۹۸۰۰ $\#$ ۱۱$^{۲}$ × ۳$^{۴}$ و از آنجا :

$$۱۱^{۲} \# \frac{۷^{۲} \times ۲ \times ۱۰۰}{۳^{۴}}$$

با لگاریتم‌گرفتن از تساوی تقریبی فوق بدست می‌آید :

$$\lg ۱۱ \# \frac{۲\lg ۷ + \lg ۲ + ۲ - ۴\lg ۳}{۲}$$

برای‌پیدا کردن $\lg$ ۱۳ می‌توان‌از تساوی ۲۲۰۰ $\#$ ۲۱۹۷ = ۱۳$^{۳}$ استفاده کرد. برای محاسبهٔ $\lg$ ۱۷ می‌نویسیم : ۴۹۰۰ $\#$ ۴۹۱۳ = ۱۷$^{۳}$ وغیره .

لگاریتم عددهای سه‌رقمی (۱۱۱ و غیره) را ، به استثنای ۱۰۱ ، ۱۰۲ وغیره ، به کمک تناسب و به کمک لگاریتم عدد ۱۱۰ و غیره می‌توان محاسبه کرد .

$\lg\pi = ۰{,}۴۹۷$

$\lg ۲\pi = ۰{,}۷۹۸$

$\lg\sqrt{۲} = ۰{,}۱۵۰$

$\lg\sqrt{۳} = ۰{,}۲۳۹$

| N | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱,۰ | ۰۰۰ | ۰۰۴ | ۰۰۹ | ۰۱۳ | ۰۱۷ | ۰۲۱ | ۰۲۵ | ۰۲۹ | ۰۳۳ | ۰۳۷ | | | | | | | | | |
| ۱,۱ | ۰۴۱ | ۰۴۵ | ۰۴۹ | ۰۵۳ | ۰۵۷ | ۰۶۱ | ۰۶۴ | ۰۶۸ | ۰۷۲ | ۰۷۶ | | | | | | | | | |
| ۱,۲ | ۰۷۹ | ۰۸۳ | ۰۸۶ | ۰۹۰ | ۰۹۳ | ۰۹۷ | ۱۰۰ | ۱۰۴ | ۱۰۷ | ۱۱۱ | | | | | | | | | |
| ۱,۳ | ۱۱۴ | ۱۱۷ | ۱۲۱ | ۱۲۴ | ۱۲۷ | ۱۳۰ | ۱۳۴ | ۱۳۷ | ۱۴۰ | ۱۴۳ | | | | | | | | | |
| ۱,۴ | ۱۴۶ | ۱۴۹ | ۱۵۲ | ۱۵۵ | ۱۵۸ | ۱۶۱ | ۱۶۴ | ۱۶۷ | ۱۷۰ | ۱۷۳ | | | | | | | | | |
| ۱,۵ | ۱۷۶ | ۱۷۹ | ۱۸۲ | ۱۸۵ | ۱۸۸ | ۱۹۰ | ۱۹۳ | ۱۹۶ | ۱۹۹ | ۲۰۱ | | | | | | | | | |
| ۱,۶ | ۲۰۴ | ۲۰۷ | ۲۱۰ | ۲۱۲ | ۲۱۵ | ۲۱۷ | ۲۲۰ | ۲۲۳ | ۲۲۵ | ۲۲۸ | | | | | | | | | |
| ۱,۷ | ۲۳۲ | ۲۳۳ | ۲۳۶ | ۲۳۸ | ۲۴۱ | ۲۴۳ | ۲۴۶ | ۲۴۸ | ۲۵۰ | ۲۵۳ | | | | | | | | | |
| ۱,۸ | ۲۵۵ | ۲۵۸ | ۲۶۰ | ۲۶۲ | ۲۶۵ | ۲۶۷ | ۲۷۰ | ۲۷۲ | ۲۷۴ | ۲۷۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ |
| ۱,۹ | ۲۷۹ | ۲۸۱ | ۲۸۳ | ۲۸۶ | ۲۸۸ | ۲۹۰ | ۲۹۲ | ۲۹۴ | ۲۹۷ | ۲۹۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ |
| ۲ | ۳۰۱ | ۳۲۲ | ۳۴۲ | | | | | | | | ۲ | ۴ | ۶ | ۸ | ۱۰ | ۱۲ | ۱۴ | ۱۶ | ۱۸ |
| ۲ | | | | ۳۶۲ | ۳۸۰ | ۳۹۸ | | | | | ۲ | ۴ | ۵ | ۷ | ۹ | ۱۱ | ۱۰ | ۱۴ | ۱۶ |
| ۲ | | | | | | | ۴۱۵ | ۴۳۱ | ۴۴۷ | ۴۶۲ | ۲ | ۳ | ۵ | ۶ | ۸ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۳ | ۱۴ |
| ۳ | ۴۷۷ | ۴۹۱ | ۵۰۵ | ۵۱۹ | | | | | | | ۱ | ۳ | ۴ | ۶ | ۷ | ۸ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ |
| ۳ | | | | | ۵۳۱ | ۵۴۴ | ۵۵۶ | ۵۶۸ | ۵۸۰ | ۵۹۱ | ۱ | ۲ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۱۰ | ۱۱ |
| ۴ | ۶۰۲ | ۶۱۳ | ۶۲۳ | ۶۳۳ | ۶۴۳ | ۶۵۳ | | | | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ |
| ۴ | | | | | | | ۶۶۳ | ۶۷۲ | ۶۸۱ | ۶۹۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ |
| ۵ | ۶۹۹ | ۷۰۸ | ۷۱۶ | ۷۲۴ | ۷۳۲ | ۷۴۰ | ۷۴۸ | ۷۵۶ | ۷۶۳ | ۷۷۱ | ۱ | ۲ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۶ | ۷ |
| ۶ | ۷۷۸ | ۷۸۵ | ۷۹۲ | ۷۹۹ | ۸۰۶ | ۸۱۳ | ۸۲۰ | ۸۲۶ | ۸۳۳ | ۸۳۹ | ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۳ | ۴ | ۵ | ۵ | ۶ |
| ۷ | ۸۴۵ | ۸۵۱ | ۸۵۷ | ۸۶۳ | ۸۶۹ | ۸۷۵ | ۸۸۱ | ۸۸۶ | ۸۹۲ | ۸۹۸ | ۱ | ۱ | ۲ | ۲ | ۳ | ۳ | ۴ | ۵ | ۵ |
| ۸ | ۹۰۳ | ۹۰۸ | ۹۱۴ | ۹۱۹ | ۹۲۴ | ۹۲۹ | ۹۳۵ | ۹۴۰ | ۹۴۴ | ۹۴۹ | ۱ | ۱ | ۲ | ۲ | ۳ | ۳ | ۴ | ۴ | ۵ |
| ۹ | ۹۵۴ | ۹۵۹ | ۹۶۴ | ۹۶۸ | ۹۷۳ | ۹۷۸ | ۹۸۲ | ۹۸۷ | ۹۹۱ | ۹۹۶ | ۰ | ۱ | ۱ | ۲ | ۲ | ۳ | ۳ | ۴ | ۴ |
| | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ |

لگاریتم عددهای ۱۰۱ ، ۱۰۲ وغیره را می‌توان با کمك تساوی $۱۰۱^{۲}=۱۰۲۰۱\#۱۰۲۰۰=۲\times۳\times۱۷\times۱۰۰$ محاسبه کرد .

لگاریتم عددهای مرکب (غیر اول ) هم که بسادگی و با جمع لگاریتمهای عددهای اول بدست می‌آید .

بـه این ترتیب دیده می‌شود کـه خیلی ساده می‌توان جـدول لگاریتمهای سه رقمی را برای استفاده در دبیرستان و با عملیات ساده تشکیل داد .

جدول سه رقمی لگاریتم را لوج فیزیکدان انگلیسی تنظیم کردو پس از او یا.ای. پرلمان ریاضی‌دان شوروی آن را تکمیل کرد و ما این جدول را درصفحهٔ ۲۱۹ آورده‌ایم .

## روش ساروس

درقرن نوزدهم ، ساروس (۱۷۹۸-۱۸۶۱) ریاضی‌دان فرانسوی روش ساده‌ای برای محاسبهٔ لگاریتمها عرضه کرد . این روش براساس دستگاه عددشماری به‌مبنای ۲ قرار دارد. دردستگاه عددشماری به‌مبنای ۲ ، ضرب هر عدد در ۲ بسادگی انجام می‌گیرد : کافـی است ممیز را یك رقم به‌طرف راست منتقل کنیم.

فرض کنید داشته باشیم :

$$10^{x}=N \qquad (۹)$$

از آنجا بدست می‌آید: $x=\lg N$

مفسر لگاریتم با قاعدهٔ ساده‌ای بدست می‌آید . این مفسر را $n$ می‌گیریم . مانتیس آن را در دستگاه عدد شماری به مبنای ۲ مساوی $x_1x_2x_3\cdots$ فرض می‌کنیم که هریك از رقمهای $x_1$، $x_2$، $x_3$، ... صفر یا واحد است .

در رابطهٔ(۹)به‌جای $x$ ، مقدارش‌را قرارمی‌دهیم،بدست‌می‌آید:

$$10^{n,x_1x_2x_3\cdots}=N \Rightarrow 10^{n}\cdot 10^{0,x_1x_2x_3}=N$$

طرفین رابطهٔ اخیر را بر $10^{n}$ تقسیم می‌کنیم ، می‌شود :

$$10^{0,x_1x_2x_3\cdots}=N:10^{n}$$

اگر $N:10^{n}$ را مساوی $N_1$ بگیریم ، می‌توان رابطهٔ اخیر را چنین نوشت :

$$10^{0,x_1x_2x_3\cdots}=N_1$$

با مجذور کردن طرفین این رابطه خواهیم داشت :

$$10^{x_1,x_2x_3\cdots}=N_1^{2},$$

که در آن $x_1$ ، مفسر لگاریتم عدد $N_1^{2}$ است :

$$x_1=\begin{cases}1 & (\text{اگر } N_1^{2}\geqslant 10 \text{ باشد})\\ 0 & (\text{اگر } N_1^{2}<10 \text{ باشد})\end{cases}$$

بعد از آنکه رقم $x_۱$ معلوم شد، طرفین تساوی اخیررا بر $۱۰^{x_۱}$ تقسیم می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$۱۰^{۰,x_۲x_۳\cdots}=N_۲$$

به‌همین ترتیب $x_۲$ هم پیدا می‌شود .

بنابراین می‌توانیم رقمهای لگاریتم را به هرتعداد دلخواه پیدا کنیم ، که البته در دستگاه عددشماری بـه‌مبنای ۲ خواهد بود و بعداً می‌توان‌بسهولت آنرا به‌دستگاه اعشاری تبدیل کرد .

به عنوان مثال $lg۵$ را محاسبه می‌کنیم . داریم :

$$۱۰^{x}=۵\ ,\ n=۰\ ,\ ۱۰^{۰,x_۱x_۲x_۳\cdots}=۵$$

طرفین تساوی را مجذور می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$۱۰^{x_۱,x_۲x_۳\cdots}=۲۵\ ,$$

چون $۱۰<۲۵$ است $x_۱=۱$ می‌شود و در این صورت :

$$۱۰^{۱,x_۲x_۳x_۴\cdots}=۲۵\ ,$$

طرفین تساوی را بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم ، می‌شود :

$$۱۰^{۰,x_۲x_۳x_۴\cdots}=۲,۵$$

دوطرف تساوی را مجذور می‌کنیم:

$$۱۰^{x_۲,x_۳x_۴\cdots}=۶,۲۵,$$

و چون $۱۰>۶,۲۵$ است $x_۲=۰$ می‌شود . بنابراین :

$$۱۰^{۰,x_۳x_۴\cdots}=۶,۲۵$$

طرفین را مجذور می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$10^{x_3{,}x_4x_5\cdots}=39{,}06$$

با ادامهٔ این روش بترتیب بدست می‌آید :

$$x_3=1,$$
$$10^{0{,}x_4x_5\cdots}=3{,}906,$$
$$10^{x_4{,}x_5\cdots}=15{,}26;$$
$$x_4=1,$$
$$10^{0{,}x_5x_6\cdots}=1{,}526,$$
$$10^{x_5{,}x_6\cdots}=2{,}329;$$
$$x_5=0,$$
$$10^{0{,}x_6x_7\cdots}=2{,}329,$$
$$10^{x_6{,}x_7\cdots}=5{,}424;$$
$$x_6=0,$$
$$10^{0{,}x_7x_8\cdots}=5{,}424,$$
$$10^{x_7{,}x_8\cdots}=29{,}42;$$

$$x_7=1,$$
$$10^{0{,}x_8x_9\cdots}=2{,}942,$$
$$10^{\ _8{,}x_9\cdots}=8{,}554;$$
$$x_8=0,$$
$$10^{0{,}x_9x_{10}\cdots}=8{,}554,$$
$$10^{x_9{,}x_{10}\cdots}=73{,}17;$$
$$x_9=1,$$
$$10^{0{,}x_{10}\cdots}=7{,}317,$$
$$10^{x_{10}{,}x_{11}\cdots}=53{,}54;$$
$$x_{10}=1,$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$0{,}x_1x_2x_3\cdots x_{10}=0{,}1011001011$$

حالا باید این عدد را ازمبنای ۲ به مبنای ۱۰ ببریم . باید مجموع زیر را محاسبه کنیم :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{10}}$$

به کمک جدول زیر می‌توان بسادگی مجموع را بدست آورد :

| عدد در مبنای ۱۰ | نمای عدد ۲ در مخرج | عدد درمبنای ۲ |
|---|---|---|
| ۰,۵ | ۱ | ۰,۱ |
| ۰,۲۵ | ۲ | ۰,۰۱ |
| ۰,۱۲۵ | ۳ | ۰,۰۰۱ |
| ۰,۰۶۲۵ | ۴ | ۰,۰۰۰۱ |
| ۰,۰۳۱۲۵ | ۵ | ۰,۰۰۰۰۱ |
| ۰,۰۱۵۶۲۵ | ۶ | ۰,۰۰۰۰۰۱ |
| ۰,۰۰۷۸۱۲۵ | ۷ | ۰,۰۰۰۰۰۰۱ |
| ۰,۰۰۳۹۰۶۲۵ | ۸ | ۰,۰۰۰۰۰۰۰۱ |
| ۰,۰۰۱۹۵۳۱۲۵ | ۹ | ۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۱ |
| ۰,۰۰۰۹۷۶۵۶۲۵ | ۱۰ | ۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱ |

به این ترتیب :

۰,۵
۰,۱۲۵
۰,۰۶۲۵
۰,۰۰۷۸۱۲۵
۰,۰۰۱۹۵۳۱۲۵
۰,۰۰۰۹۷۶۵۶۲۵
―――――――
۰,۶۹۸۲۴۲۱۸۷۵

و بنابراین : lg۵#۰,۶۹۸

متذکر می‌شویم که در مجذور کـردن ، مقدار تقریبی را در نظر می‌گیریم .

این روش برای دانش‌آموزان دوران متوسطه بسیار جالب و در عین‌حال ساده است ، به‌شرطی‌که قبلاً آنها را با دستگاه عددشماری به مبنای ۲ آشنا کرده باشیم .

## روش کسرهای مسلسل

به کمك کسرهای مسلسل هم می‌توان بـا روش‌کاملاً ساده‌ای ، محاسبهٔ تقریبی لگاریتم عددها را انجام داد. این روش را تیلور درسال ۱۷۱۷ کشف کرد .

فرض کنیدکه‌بخواهیم‌لگاریتم عدد ۲ رادرمبنای۱۰محاسبه‌کنیم :

لگاریتم عـدد ۲ را مساوی $\frac{1}{x}$ فرض می کنیم،بنابراین $2 = 10^{\frac{1}{x}}$ می‌شود . اگر طرفین این تساوی را به توان x برسانیم ، $10 = 2^x$ بدست می آید .

بسادگی دیده می‌شودکه x عددی است بین ۳ و ۴ . فـرض مـی‌کنیم $x = 3 + \frac{1}{x_1}$ باشد، بنابراین خواهیم داشت :

$$۱۰=۲^{۳+\frac{۱}{x_۱}} \Rightarrow ۲^{\frac{۱}{x_۱}}=\frac{۱۰}{۸} \Rightarrow ۲=\left(\frac{۵}{۴}\right)^{x_۱}$$

می‌توان دید که $x_۱$ بین ۳ و ۴ قرار گرفته است ، فرض می‌کنیم :

$$x_۱=۳+\frac{۱}{x_۲}$$

بدست می‌آید :

$$۲=\left(\frac{۵}{۴}\right)^{۳+\frac{۱}{x_۱}} \Rightarrow \frac{۱۲۵}{۱۲۸}=\left(\frac{۵}{۴}\right)^{\frac{۱}{x_۲}} \Rightarrow \frac{۵}{۴}=\left(\frac{۱۲۵}{۱۲۸}\right)^{x_۲}$$

و غیره .

در نتیجه به تساویهای زیر می‌رسیم :

$$x=۳+\frac{۱}{x_۱},\ x_۱=۳+\frac{۱}{x_۲},\ x_۲=۹+\frac{۱}{x_۳},$$

$$x_۳=۲+\frac{۱}{x_۴},\ x_۴=۲+\frac{۱}{x_۵},\ x_۵=۴+\frac{۱}{x_۶}$$

برای $lg۲$ ، عبارت را به‌صورت کسر مسلسل می‌نویسیم :

$$lg۲=\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۹+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۴+\cdots}}}}}}$$

کسرهای متقارب چنین است :

$$\frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۱۰}, \frac{۲۸}{۹۳}, \frac{۱۴۶}{۴۸۵}, \frac{۶۴۳}{۲۱۳۶}, \dots$$

و به این ترتیب :

$$\lg ۲ \# \frac{۶۴۳}{۲۱۳۶} \# ۰,۳۰۱۰۳$$

اشکال این روش در اینجاست که باید عددهای کسری را به توانهای بزرگ رسانید .

اگر ازمفهوم کسر مسلسل استفاده نکنیم ، می‌توان برای پایان کار مختصر تغییری داد : بعد از اینکه پیدا کردیم : $x_۵ = ۴ + \frac{۱}{x_۶}$، چون نمی‌خواهیم $\lg ۲$ را بادقت‌محاسبه کنیم و به‌همین مناسبت عمل را ادامه نمی‌دهیم ، $x_۵ = ۴$ می‌گیریم ، در این‌صورت :

$$x_۵ = ۴ , \ x_۴ = ۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴} , \ x_۳ = ۲ + \frac{۴}{۹} = \frac{۲۲}{۹} ,$$

$$x_۲ = ۹ + \frac{۹}{۲۲} = \frac{۲۰۷}{۲۲} ,$$

$$x_۱ = ۳ + \frac{۲۲}{۲۰۷} = \frac{۶۴۳}{۲۰۷} , \ x = ۳ + \frac{۲۰۷}{۶۴۳} = \frac{۲۱۳۶}{۶۴۳} .$$

و به این ترتیب :

$$l۲\, g = \frac{۱}{x} = \frac{۶۴۳}{۲۱۳۶}$$

که با تبدیل این کسر به کسر اعشاری بدست می‌آید :

$$\lg ۲ = ۰{,}۳۰۱۰۳$$

## روش نامساویها

از این روش محاسبه هم می‌توان در دورهٔ متوسطه استفاده کرد، منتهی عملیات این روش به اندازهٔ کافی مفصل است .

برای استفاده از این روش باید به روابط :

$$g(a\cdot b) = \lg a + \lg b;\ \lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$$

و تجزیهٔ یك عدد به عوامل اول وحل نامعادلات آشنا بود .

شرح مختصری از این روش را می‌آوریم .

روابط اساسی را که بـه کمك آنها محاسبهٔ لگاریتمی انجـام می‌گیرد، در نظر می‌گیریم .

اگر عدد مثبت x بزرگ شود ، $\lg x$ هـم بزرگ می‌شود . از نامساوی $x^۲ > x^۲ - ۱$ (به ازای $x > ۱$) بدست می‌آید :

$$۲\lg x > \lg(x-۱) + \lg(x+۱).$$

اگر در این نـامساوی همهٔ جمله‌هـا را به یك‌طرف منتقل کنیم ، بدست می‌آید :

$$-\lg(x-۱) + ۲\lg x - \lg(x+۱) > ۰ \qquad (۱۰$$

این نـامساوی ارتباط بین لگاریتمهای سه عدد متوالی را به‌ما می‌دهد . همچنین می‌توانیم ارتباط بین لگاریتمهای چهارعدد متوالی را بدست‌آوریم . نامساوی زیر صحیح است :

$$x^{3}(x+2)>(x+1)^{3}(x-1)$$

زیـرا سمت چپ ایـن نـامساوی $x^{4}+2x^{3}$ و سمت راست آن $x^{4}+2x^{3}-2x-1$ می‌باشد وبنابراین سمت چپ به اندازهٔ $2x+1$ ازسمت راست بیشتر است . از این نامساوی‌بدست می‌آید :

$$\frac{x^{3}(x+2)}{(x+1)^{3}(x-1)}>1$$

اگر از طرفین این نـامساوی لگاریتم بگیریم ، به ازای $x>1$ بدست می‌آید :

$$-\lg(x-1)+3\lg x-3\lg(x+1)+\lg(x+2)>0 \quad (11)$$

به‌همین‌ترتیب‌می‌توان‌بین‌لگاریتمهای‌پنج‌عددمتوالی‌رابطهٔ‌زیرراپیدا کرد:

$$-\lg(x-2)+4\lg(x-1)-6\lg x+$$
$$+4\lg(x+1)-\lg(x+2)>0 \qquad (12)$$

روشی که مورد مطالعهٔ ماست، حدود بالا وپایین لگاریتم‌هرعدد صحیح را معین می‌کند ، به این ترتیب کـه بـا انتخاب روابط اصلی (۱۰)،(۱۱) و (۱۲) درموردگروههایی ازعددهای متوالی وسپس حذف

بعضی از لگاریتمها ، به‌یکی از دونامساوی زیرمی‌رسیم :

$$m\lg z-n>0 \quad \text{یا} \quad p-q\lg z>0,$$

که درنتیجه حدود بالا و پایین $\lg z$ بدست می‌آید . به این نکته بـاید توجه کرد که برای حد پایین، هرچه بزرگتر باشد وبرای حدبالا، هرچه کوچکتر باشد ، نتیجه بهتر است . اگر ضمن انتخاب گروه عددهـای متوالی به این نکته توجه نکنیم ، ممکن است حدودی بدست آید ، که به اندازهٔ کافی بهم نزدیك نباشند .

برای انتخاب گروه عددهای متوالی ، باید کوشش کرد که در این عددها حتی‌الامکان ، عوامل اول کمتری وجود داشته باشد .

البته در روابط به عوامل ۲ و ۳ حتماً برخورد می‌کنیم ، زیرا بین سه عدد متوالی (ویا بیشتر) لااقل یکی ازآنها بر ۲ یا ۳ قابل‌قسمت است .

عامل ۵ با توجه به تساوی

$$\lg 5=\lg 10-\lg 2=1-\lg 2$$

درنامساویهای مفروض به‌صورت $\lg 5$ وجود نخواهد داشت .

به‌کمك همین روابط مقدماتی برای عددهای متوالـی ، همیشه می‌توان دوعدد پیدا کرد که یکی ازآنها کوچکتراز $\lg x$ باشد(حدپایین) و دیگری بزرگتر ازآن (حد بالا) . اختلاف بین این عددها ، وقتی‌که

$x$ کوچك باشد، تنها ازصدهزارمها یا ده هزارمها تشکیل شده است،ولی وقتی که $x$ بزرگ شود، این اختلاف‌هم بزرگ می‌شود، ولی همیشه از یك هزارم کوچکتر خواهد بود .

اگر بخواهیم حد پایین وحد بالای لگاریتم عددی را برای رقم سوم اعشار بدست آوریم ، باید به‌جای خود عدد (که لگاریتم آن مورد نظر است)ازمجذور آن‌استفاده کرد،زیرا دراین‌صورت‌حدود مناسب‌تری بدست می‌آید .

محاسبهٔ نزدیکترین حدود بالا وپایین $\lg 2$ را بررسی می‌کنیم .

رابطهٔ (۱۰) برای محاسبهٔ حد پایین نزدیك به $\lg 2$ کافی است ، به شرطی که $x$ به اندازهٔ کافی بزرگ، یعنی سه‌رقمی انتخاب‌شده باشد. در انتخاب $x$ به‌این‌نکته‌هم توجه‌می کنیم که‌درعددهای $x-1$، $x$، $x+1$ بجز عوامل اول ۲ و ۳ ، حتی‌الامکان عوامل کمتری وجود داشته باشد.

در رابطهٔ (۱۰) بطور متوالی عددهـای ۲۴۳، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴ و ۱۰۲۴ را قرار می‌دهیم ، بدست می‌آید :

$$-\lg 242+2\lg 243-\lg 244>0,$$
$$-\lg 120+2\lg 121-\lg 122>0,$$
$$-\lg 121+2\lg 122-\lg 123>0,$$
$$-\lg 122+2\lg 123-\lg 124>0,$$
$$-\lg 123+2\lg 124-\lg 125>0,$$
$$-\lg 1023+2\lg 1024-\lg 1025>0$$

که با تجزیهٔ عددها به عوامل اول بدست می‌آید :

$$-\lg ۲-۲\lg ۱۱+۱۰\lg ۳-۲\lg ۲-\lg ۶۱>۰,$$
$$-۳\lg ۲-\lg ۳-\lg ۵+۴\lg ۱۱-\lg ۲-\lg ۶۱>۰,$$
$$-۲\lg ۱۱+۲\lg ۲+۲\lg ۶۱-\lg ۳-\lg ۴۱>۰,$$
$$-\lg ۲-\lg ۶۱+۲\lg ۳+۲\lg ۴۱-۲\lg ۲+\lg ۳۱>۰,$$
$$-\lg ۳-\lg ۴۱+۴\lg ۲+۲\lg ۳۱-۳\lg ۵>۰,$$
$$-\lg ۳-\lg ۱۱-\lg ۳۱+۲۰\lg ۲-۲\lg ۵-\lg ۴۱>۰$$

و از آنجا :

$$-\lg ۶۱-۲\lg ۱۱+۱۰\lg ۳-۳\lg ۲>۰, \qquad (۱۳)$$
$$-\lg ۶۱+۴\lg ۱۱-\lg ۳-۳\lg ۲-۱>۰, \qquad (۱۴)$$
$$-۲\lg ۶۱-\lg ۴۱-۲\lg ۱۱-\lg ۳+۲\lg ۲>۰, \qquad (۱۵)$$
$$-\lg ۶۱+۲\lg ۴۱-\lg ۳۱+۲\lg ۳-۳\lg ۲>۰, \qquad (۱۶)$$
$$-\lg ۴۱+۲\lg ۳۱-\lg ۳+۷\lg ۲-۳>۰, \qquad (۱۷)$$
$$-\lg ۴۱-\lg ۳۱-\lg ۱۱-\lg ۳+۲۲\lg ۲-۲>۰ \qquad (۱۸)$$

حالا بترتیب $\lg ۳۱$، $\lg ۶۱$، $\lg ۴۱$ و $\lg ۱۱$ را بین این نامساویها حذف می‌کنیم . $\lg ۳۱$ را بین نامساویهای (۱۶) و (۱۷) و (۱۸) حذف می‌کنیم :

$$+\begin{cases} -۲\lg ۶۱+۴\lg ۴۱-۲\lg ۳۱+۴\lg ۳-۶\lg ۲>۰ & (۱۶) \\ -\lg ۴۱+۲\lg ۳۱-\lg ۳+۷\lg ۲-۳>۰ & (۱۷) \end{cases}$$

---

$$-۲\lg ۶۱+۳\lg ۴۱+۳\lg ۳+\lg ۲-۳>۰ \qquad (۱۶')$$

$$+\begin{cases} -\lg ۴۱+۲\lg ۳۱-\lg ۳+۷\lg ۲-۳>۰ & (۱۷) \\ -۲\lg ۴۱-۲\lg ۳۱-۲\lg ۱۱-۲\lg ۳+۴۴\lg ۲-۴>۰ & (۱۸) \end{cases}$$

---

$$-۳\lg ۴۱-۲\lg ۱۱-۳\lg ۳+۵۱\lg ۲-۷>۰ \qquad (۱۷')$$

$\lg ۶۱$ را بین نامساویهای (۱۵) و (۱۶') حذف می‌کنیم، بدست‌می‌آید:

$$۲\lg ۴۱-۲\lg ۱۱+۲\lg ۳+۳\lg ۲-۳>۰ \qquad (۱۹)$$

و ازحذف $\lg ۶۱$ بین نامساویهای (۱۴) و (۱۵) :

$$-\lg ۴۱+۶\lg ۱۱-۳\lg ۳-۴\lg ۲-۲>۰$$

و ازنامساویهای (۱۳) و (۱۵) :

$$-\lg ۴۱-۶\lg ۱۱+۱۹\lg ۳-۴\lg ۲>۰$$

نامساوی (۱۷') را هم بدون تغییر می‌نویسیم :

$$-۳\lg ۴۱-۲\lg ۱۱-۳\lg ۳+۵۱\lg ۲-۷>۰$$

بین نامساوی (۱۹) با هریك از سه نـامساوی بعدی ، $\lg ۴۱$ را حـذف می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$۱۰\lg ۱۱-۴\lg ۳-۵\lg ۲-۷>۰,$$
$$-۱۴\lg ۱۱+۴۰\lg ۳-۵\lg ۲-۳>۰,$$
$$-۱۰\lg ۱۱+۱۱۱\lg ۲-۲۳>۰,$$

با حذف $\lg ۱۱$ بین نامساوی اول با هریك ازدونامساوی بعدی، بدست

می‌آید :

$$۴۳\lg ۳ - ۱۵\lg ۲ - ۱۶ > ۰ \qquad (۲۰)$$

$$-۴\lg ۳ + ۱۰۶\lg ۲ - ۳۰ > ۰ \qquad (۲۱)$$

که اگر $\lg ۳$ را بین این دو نامساوی حذف کنیم ، حد پایین $\lg ۲$ بدست می‌آید :

$$۴۴۹۸\lg ۲ - ۱۳۵۴ > ۰$$

و از آنجـا :

$$\lg ۲ > \frac{۶۷۷}{۲۲۴۹} \Rightarrow ۰,۳۰۱۰۲ < \lg ۲$$

برای اینکه نزدیکترین حد بالای $\lg ۲$ رابدست آوریم، رابطهٔ (۱۱) را برای گروه عددهای ۱۲۳ ، ۱۲۴ ، ۱۲۵ و ۱۲۶ می‌نویسیم ، بدست می‌آید :

$$-\lg ۱۲۳ + ۳\lg ۱۲۴ - ۳\lg ۱۲۵ + \lg ۱۲۶ > ۰$$

و رابطهٔ (۱۰) را برای گروه‌عددهای ۱۲۴،۱۲۵،۱۲۶ بکارمی‌بریم :

$$-\lg ۱۲۴ + ۲\lg ۱۲۵ - ۲\lg ۱۲۶ > ۰$$

از این دو رابطه $\lg ۱۲۴$ را حذف می کنیم ، می‌شود :

$$-\lg ۱۲۳ + ۳\lg ۱۲۵ - ۲\lg ۱۲۶ > ۰$$

که اگر عوامل را تجزیه کنیم وبجای $\lg ۵$ مساویش $۱ - \lg ۲$ را قرار

دهیم ، بدست می‌آید :

$$-\lg 41-2\lg 7-5\lg 3-11\lg 2+9>0$$

بین این نامساوی و نامساوی

$$\lg 1025-\lg 1024>0$$

که پس از تجزیه اعداد به‌صورت

$$\lg 41-12\lg 2+2>0 \qquad (*)$$

در می‌آید ، $\lg 41$ را حذف می‌کنیم ، می‌شود :

$$-2\lg 7-5\lg 3-23\lg 2+11>0 \qquad (*)$$

حالا اگر در رابطهٔ (۱۰) فرض کنیم $x=49$ نامساوی

$$2\lg 49-\lg 48-\lg 50>0$$

بدست می‌آید، که پس از ساده کردن می‌شود :

$$4\lg 7-\lg 3-3\lg 2-2>0$$

بین این نامساوی و نامساوی $(*)$ $\lg 7$ را حذف می‌کنیم :

$$-11\lg 3-49\lg 2+20>0 \qquad (22)$$

برای اینکه نامساوی دیگری بین $\lg 2$ و $\lg 3$ پیدا کنیم ، از دو نامساوی زیر استفاده می‌کنیم :

$$\lg 1025-\lg 1024>0$$

$$2\lg 81-\lg 80-\lg 82>0$$

نامساوی دوم از رابطهٔ (۱۰) با قرار دادن $x = ۸۱$ بدست آمده است .

این دونامساوی بعد ازساده شدن ، چنین می‌شوند :

$$\lg ۴۱ - ۱۲\lg ۲ + ۲ > ۰$$

$$-\lg ۴۱ + ۸\lg ۳ - ۴\lg ۲ - ۱ > ۰$$

که ازجمع آنها بدست می‌آید :

$$۸\lg ۳ - ۱۶\lg ۲ + ۱ > ۰ \qquad (۲۳)$$

نامساوی (۲۲) را در ۸ و نامساوی (۲۳) را در ۱۱ ضرب و سپس دونامساوی را با هم جمع می‌کنیم ، می‌شود :

$$-۵۶۸\lg ۲ + ۱۷۱ > ۰$$

و ازآنجا : $\lg ۲ < \frac{۱۷۱}{۵۶۸}$

و یا : $\lg ۲ < ۰,۳۰۱۰۶$

این حد بالا تنها به‌اندازهٔ چهارصدهزارم از حد پایین $\lg ۲$ بیشتر است :

$$۰,۳۰۱۰۲ < \lg ۲ < ۰,۳۰۱۰۶$$

## روش رسم منحنی

بجز روشهایی‌که برای محاسبهٔ لگاریتمها ذکر کردیم ، روش رسم منحنی هم وجود دارد .

از بین روشهای مختلفی که در این مورد وجود دارد ، روشی را ذکر می‌کنیم که ب. م. برادیس در کتاب خود به‌نام «چگونه باید محاسبه کرد ؟» (چاپ سال ۱۹۳۴) آورده است .

مثلاً جدول لگاریتمهای اعشاری اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰ را تشکیل می‌دهیم. مفسر لگاریتمهای عددهای ۱ تا ۹ مساوی صفر و عددهای ۱۰ تا ۹۹ مساوی واحد است . بنابراین باید جدول را برای مانتیسها تشکیل داد . برای مانتیسها هم کافی است که عددهای ۱۰ تا ۱۰۰ را درنظر بگیریم، زیرا مانتیس عددهای ۲،۳،۴،۵، ... همان مانتیس عددهای ۲۰،۳۰،۴۰،۵۰، ... است. عددهای کسری ۱٫۰؛ ۱٫۱؛ ۱٫۲؛ ...؛ ۹٫۹؛ ۱۰٫۰ را درنظر می‌گیریم که مانتیسهای آنها برابر است با مانتیسهای عددهای ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...، ۹۹، ۱۰۰ .

مانتیسهای این عددهای کسری را تا دورقم اعشار محاسبه می‌کنیم.

| $N$ | ۱ | ۱۰ |
|---|---|---|
| $\lg N$ | ۰ | ۱ |

با درنظر گرفتن واسطهٔ هندسی ۱ و ۱۰ و سپس واسطهٔ عددی ۰ و ۱ به‌جدول زیر، که عددهای آن به‌هم نزدیکترند ، می‌رسیم :

| N | ۱ | ۳,۱۶۲ | ۱۰ |
|---|---|---|---|
| lgN | ۰ | ۰,۵ | ۱ |

$$\left(\frac{۰+۱}{۲}=۰,۵\ ;\ \sqrt{۱\times۱۰}\doteq۳,۱۶۲\right)$$

با ادامهٔ عمل قبل ، جدول زیر بدست می‌آید :

| N | ۱ | ۱,۷۷۸ | ۳,۱۶۲ | ۵,۶۲۳ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|
| lgN | ۰ | ۰,۲۵ | ۰,۵ | ۰,۷۵ | ۱ |

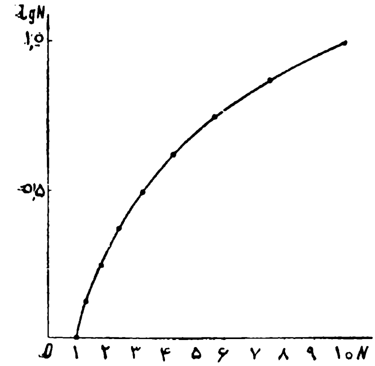
و بالاخره :

| N | ۱ | ۱,۳۳۴ | ۱,۷۷۸ | ۲,۳۷۱ | ۳,۱۶۲ | ۴,۲۱۷ | ۵,۶۲۳ | ۷,۴۹۹ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lgN | ۰ | ۰,۱۲۵ | ۰,۲۵۰ | ۰,۳۷۵ | ۰,۵۰۰ | ۰,۶۲۵ | ۰,۷۵۰ | ۰,۸۷۵ | ۱,۰۰۰ |

بدون اینکه این جدول را ادامه بدهیم ، لگاریتم عددهای ۱۱ ، ۱۲ ، ۱۳ ، ... ر . ب کمك منحنی پیدا می‌کنیم . منحنی ر به‌کمك جدول آخر رسم می‌کنیم . محورطول نماینده عددها و محورعرض لگاریتمهای آنهاست (شکل ۱۱) . بـه کمك این منحنی مـی‌توانه

لگاریتمهای صدعدداولیه رابدست آورد. لگاریتمها تا دو رقم اعشار پیدا می‌شود .

روش رسم منحنی هم وقت زیاد می‌گیرد وهم جواب با دقت کم پیدا می‌شود و بنابراین بهتر است به‌عنوان تمرین درانجمنهای ریاضی دانش آموزان مطرح شود .




شکل ۱۱

# فصل ششم

## آموزش توابع نمائی و لگاریتمی در دبیرستانها

# ۱

# روشهای طرح نظریهٔ لگاریتم
# در کتابهای درسی دبیرستانی

قبل از اینکه به مطالعهٔ روشهای آموزش لگاریتم در دبیرستانها بپردازیم ، بطور خلاصه انواع طرح نظریهٔ لگاریتم را ذکر می کنیم .

در ابتدای قرن بیستم ، خواص اساسی لگاریتم را بخصوص در مقابلهٔ تصاعدهای حسابی وهندسی مورد مطالعه قرار می‌دادند، به‌این ترتیب آموزش لگاریتم منعکس کنندهٔ سیر تاریخی بوجود آمدن آن بود .

مثلا در کتاب درسی آ. ن. گلاگولو (چاپ ۱۹۰۷) تصاعدهـای

زیر انتخاب شده است :

$$\div\div\ 1, q, q^{2}, q^{3}, \cdots, q^{n},$$
$$\div\ 0, r, 2r, 3r, \cdots, nr$$

و تعریف لگاریتم به‌این ترتیب داده شده است: هرجملهٔ تصاعدحسابی، لگاریتم جملهٔ متناظر آن در تصاعد هندسی نامیده می‌شود . سپس مؤلف خواص اساسی لگاریتم را نتیجه می‌گیرد .

طرح نظریهٔ لگاریتم به این ترتیب قانع کننده نیست ، زیرا تنها مقابلهٔ تصاعدها نمی‌تواند اساس نظری برای مفهوم کلی لگاریتم باشد. درحقیقت، وقتی که جمله‌های تصاعد حسابی (لگاریتمها) را باجمله‌های تصاعد هندسی مقابله می‌کنیم ، تنها لگاریتم یك رشته عدد جدا ازهم معین می‌شود و هیچ معلوم نیست که لگاریتم عددهایی را که در تصاعد هندسی وجود ندارد، چگونه باید پیدا کرد. وقتی که لگاریتم بدینگونه تعریف می‌شود ، به اندازهٔ کافی عمومیت پیدا نمی‌کند ، برای اینکه تعریف کلی لگاریتم داده شود ، باید بین مقادیری که بطورمتصل تغییر می‌کنند ، ارتباط تابعی بدست آورد .

در کتاب درسی آ. یو. داویدوو (چاپ ۱۹۲۳) هم نظریهٔ لگاریتم در ارتباط با تصاعدهـا ، طرح شده است . مثلاً مؤلف این مسئله را بررسی می‌کند: بین دوعدد a و b ، تعداد m واسطهٔ هندسی درج کنید.

درابتدای طرح آموزش لگاریتم ، تعریف معمولی لگاریتم داده می‌شود: لگاریتم یك عدد عبارت‌است ازعددی‌که اگرمبنا را به‌توان آن برسانیم ، عددی بدست‌آید که لگاریتم آن مورد نظر است . سپس از تعریف لگاریتم خواص اساسی آن نتیجه‌گیری می‌شود .

سپس اثبات قضیهٔ زیر داده می‌شود : وقتی‌که لگاریتمهای اعداد به تصاعد حسابی باشند ، عددهای متناظر آنها به‌تصاعد هندسی‌خواهند بود . پس از این قضیه،اثبات قضیهٔ اساسی نظریهٔ لگاریتم داده‌می‌شود، یعنی : هرعدد مثبت دارای لگاریتم است . اثبات این قضایا متکی بر تصاعدها و نظریهٔ حدود است . بعد اثبات چهار قضیه داده می‌شود : لگاریتم حاصلضرب ، خارج قسمت ، توان و ریشه .

سپس مطالب زیر مورد مطالعه قرارمی‌گیرد : مدول عبورازیك دستگاه لگاریتمی به دستگاه دیگر ، محاسبهٔ لگاریتمها به‌کمك کسرهای مرکب وغیره .

مطالب‌کتاب داویدوو درسطح عالی نظری قرار دارد ؛ ولی با وجود این جنبهٔ مثبت، باید نارسائی‌آن‌را متذکرشد: دراین کتاب‌نظریهٔ کلی لگاریتمها از نظر ارتباط تـابعی دو مقدار مـورد بررسی قـرار نگرفته است .

حالا یکی دیگر ازانواع روشهای طرح نظریهٔ لگاریتمها، یعنی توانها ولگاریتمها ، را مورد بررسی قرارمی‌دهیم .

دربعضی از کتابهای درسی جبر ، برای طرح نظریهٔ لگاریتم، از توانها با نمای گویا شروع کرده‌اند وسپس به‌مفهوم نمای گنگ رسیده‌اند. پس ازاین مقدمه ، تعریف معمولی لگاریتم داده شده است و سپس به اثبات وجود لگاریتم پرداخته شده است (اثبات براساس نظریهٔ حدود ونظریهٔ اعدادگنگ داده شده است) . به دنبالهٔ مطلب خواص اساسی لگاریتم نتیجه‌گیری شده است: قضایای‌مربوط به‌لگاریتم‌خارج‌قسمت، توان ، ریشه و غیره .

نقص این روش مربوط به این‌است که فکر ارتباط تابعی روشن نشده است، علاوه بر آن رسم منحنی‌تابع مورد توجه قرارنگرفته‌است. اگراین‌نواقص برطرف شود، طرح نظریه‌کاملاً دقیق می‌شود،ولی برای دانش‌آموزان دبیرستان سهل‌الوصول نیست .

حالا بطورخلاصه به روش کنونی‌آموزش نظریهٔ لگاریتم، ازنظر ارتباط تابعی مقادیر ، می‌پردازیم .

آموزش جبر در دبیرستان ، از ابتدای قرن بیستم ، براساس ارتباط تابعی مقادیر قرارگرفته است‌وبنابراین نظریهٔ لگاریتم هم‌برهمین اساس ساخته شده است .

همهٔ عملیات مربوط به توانها دریك‌فصل جمع می‌شود وارتباط آنها با تابع‌نمائی مورد مطالعه قرارمی‌گیرد . تابع لگاریتمی (به‌عنوان عکس تابع‌نمائی) ، بعد ازتابع‌نمائی آموخته می‌شود .

چنین روشی برای طرح نظریه خیلی گویاتر است ، زیرا مفهوم تابع ، در ریاضیات معاصر ، اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد و باید در دورهٔ جبر دبیرستانی ، و بخصوص در موردآموزش لگاریتم ، نقش اساسی داشته باشد . دربسیاری ازکتابهای درسی اخیر، نظریهٔ لگاریتم‌برمبنای همین روش ، طرح شده است .

درکتابهای درسی سه روش برای طرح نظریهٔ لگاریتم و توابع لگاریتمی وجود دارد .

۱. دو تصاعددرنظرگرفته‌می‌شود: مثلاً تصاعدحسابی‌باقدرنسبت۱ و تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ :

$$\ldots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$$

$$\ldots, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, ۴, ۸, \ldots$$

مقابلهٔ این دوتصاعد ، منجر به‌نتیجه‌ای می‌شود : ضرب ، تقسیم و به‌توان رساندن جمله‌های تصاعد هندسی را می‌توان به‌جمع، تفریق و ضرب جمله‌های تصاعد عددی تبدیل‌کرد . آنگاه مفهوم لگاریتم‌معرفی می‌شود و سپس لگاریتم درمبناهـای مختلف و بکار بـردن لگاریتم در

محاسبات مختلف ، موردمطالعه قرارمی‌گیرد . بعد از این مراحل است که تابع لگاریتمی آموخته می‌شود .

۲. ابتدا تعریف لگاریتم به عنوان نمای یك توان داده‌می‌شود، سپس تابع لگاریتمی و کاربرد آن در محاسبات مورد مطالعه قرار می‌گیرد .

۳. قبل ازهمه مفهوم تابع لگاریتمی، به‌عنوان عکس تابع نمائی داده می‌شود و خواص آن مورد مطالعه قرارمی‌گیرد ، سپس از تعریف لگاریتم وموارد استفادهٔ آن درمحاسبات گفتگو می‌شود .

ما روش اول را برتر می‌دانیم ، زیرا این طریقه با تکامل تاریخی آموزش لگاریتم تطبیق می‌کند و به درك سریعتر مقادیر لگاریتمی کمك می‌کند .

# ۲

# راهنمای تعلیم تابع نمائی و لگاریتم در دبیرستانها

طبق یك سنت دیرین ، تابع لگاریتمی را دردبیرستانها به‌عنوان عکس تابع نمائی تعریف می‌کنند . با این روش ، طرح تابع نمائی اساس ساختمانی نظریهٔ لگاریتم را تشکیل می‌دهد .

بطورمنطقی ، تعریف دقیق تابع نمائی تنها وقتی می‌تواند داده شود که دانش‌آموزان بطور کامل از نظریهٔ حدود و نظریهٔ اعداد گنگ مطلع باشند . ولی درك روشن این مطالب را از دانش‌آموزان مدارس

متوسطه نمی‌توان انتظار داشت ، زیرا هنوز مقدمات ذهنی فهم اینگونه مطالب درآنها بوجود نیامده است .

به این ترتیب ، تعریف دقیق ومنطقی تابع نمائی ، و بنابراین لگاریتم ، برای دانش‌آموزان دبیرستانی ممکن نیست . به‌هرنحوی که این تعریف مطرح شود ، مشکلات زیادی را به‌همراه دارد که رفع آنها مستلـزم تجدید بنای برنامه‌هـا و تغییر جدی روشهای سنتی در تعلیم قسمتهای مختلف ریاضی ، مثل نظریهٔ حدود ونظریهٔ اعدادگنگ، است.

مؤلفین کتابهای درسی به‌چه نحوی با این وضع روبرو شده‌اند؟

اغلب مؤلفین به طرح ساده و غیردقیق نظریه می‌پردازند ، مثلاً درحالی که از مفهوم نمای گنگ استفاده می‌کنند ، وجود $a^{\alpha}$ را واضح می‌گیرند و خواص نماهای گویا را ، بطورمکانیکی وبدون اثبات ، در مورد نماهای گنگ هم بکار می‌برند . درمورد تبدیل یك‌عدد به صورت توانی با پایهٔ مفروض ، حداکثر به بیانی ازنوع زیرا کتفا می‌شود : «در قسمتی از ریاضیات ثابت می‌کنند که طریقه‌ای وجود داردکه به‌کمك آن بتوان هرعدد مفروض N را به صورت $10^x$ نوشت، بطوری که یا دقیقاً مساوی عدد N باشد و یا اختلاف آن با N بقدر دلخواه کوچك باشد».

درکتابهای درسی از روشهای ساختن جدولهای لگاریتمی ونوع

محاسبهٔ مقدماتی لگاریتمها ، ازمسیر تاریخی کشف وتکامل لگاریتم‌و... صحبتی نشده است .

چگونه مـی‌توان دانش‌آمـوزان را بـا لگاریتم اعـداد و روش محاسبات لگاریتمی آشنا کرد ؛ در حالی‌که نظریهٔ حدود ، نظریهٔ اعداد گنگ ومفهوم خود لگاریتم برای آنها روشن نیست ؟

به‌نظر ما ، راه خروج از این وضع چنین است : آن قسمت از ریاضیات را ، که فهم نظری آنهـا بـالاتر از سطح اطلاعات ریاضی دانش‌آموزان است ، باید به کمك محاسبات عملی و مشخص و رسم شکل برای موضوع مورد نظر ، آموخت . مثلاً به‌جای اینکه وجود لگاریتم ، بـه‌عنوان نمای‌گنگ ، ثابت شود ، باید این حکم را بدون اثبات پذیرفت و تنها محاسبهٔ مشخص این نما را با تقریب معین انجام داد ، یعنی بـه حل تقریبی معادلهٔ $a^x = b$ $(b>0 ، a\neq 1 ، a>0)$ پرداخت . حل تقریبی این معادله را می‌توان بایکی ازروشهای‌مقدماتی محاسبهٔ لگاریتمها انجام داد ، مثلا با روش بریگس (فصل پنجم همین کتاب را ببینید) .

فصل مربوط به تعمیم مفهوم توان و تابع‌نمائی باید بـه عنوان مقدمه‌ای برای آموزش لگاریتم قرار گیرد ، ولی در عین‌حال فصلی

مستقل تلقی شود .

چون آموزش لگاریتم تا حد زیادی براساس تابع نمائی است، باید دانش‌آموزان را با مطالبی که مربوط به نمای توانهاست آشنا کرد: وقتی که توانی با نمای کسری باشد، چگونه توان را محاسبه می کنند، مثلاً مقدارعددی هریك از عبارتهای $۲۷^{\frac{۲}{۳}}$ ، $۶۴^{-\frac{۵}{۶}}$ و غیره چقدر است ؟ عبارتهای با نمای کسری چند مقدار دارند ؟ وقتی که نمای یك توان عددی گنگ باشد ، چه مفهومی دارد ؟ مطلب اخیر ، بخصوص برای روشن کردن مفهوم لگاریتم اهمیت جدی دارد ، زیرا لگاریتمها به استثنای بعضی موارد خاص ، اعدادی گنگ هستند .

اثبات دقیق وجود نمای حقیقی (و ضمناً اثبات وجود لگاریتم) برای دانش‌آموزان دبیرستانها ، ممکن نیست . طرح نظری این مطلب، که هرعدد مثبت می‌تواند به‌صورت توانی با پایهٔ مثبت دلخواه (غیراز واحد) نشان داده شود ، بدون نظریهٔ حدود و نظریهٔ اعداد گنگ ممکن نیست ، بنابراین نمی‌شود وجود جواب حقیقی x را برای معادلهٔ زیر ثابت کرد :

$$a^x = b$$

باید متذکر شد که بسیاری ازدانش‌آموزان، ضمن حل نمونه‌های

مربوط به توانهای کسری با نمای منفی ، ابتدا آنها را به کسر و سپس به رادیکال تبدیل می‌کنند . ولی به این ترتیب معنای تعمیم مفهوم توان ازدست می‌رود . برای رفع این مشکل ، باید دانش‌آموزان را وادار کرد مثالهائی ازاین قبیل را حل کنند . چند مثال ذکر می‌کنیم .

مثال ۱. این عبارت را ساده کنید:

$$\left(\frac{a^{\frac{۱}{۴}}b^{\frac{۱}{۴}}-b^{\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۱}{۲}}-a^{\frac{۱}{۴}}b^{\frac{۱}{۴}}}\right)^{-۴}$$

حل. به ترتیب داریم :

$$\left(\frac{a^{\frac{۱}{۴}}b^{\frac{۱}{۴}}-b^{\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۱}{۲}}-a^{\frac{۱}{۴}}b^{\frac{۱}{۴}}}\right)^{-۴}=\left[\frac{b^{\frac{۱}{۴}}(a^{\frac{۱}{۴}}-b^{\frac{۱}{۴}})}{a^{\frac{۱}{۴}}(a^{\frac{۱}{۴}}-b^{\frac{۱}{۴}})}\right]^{-۴}=\left(\frac{b^{\frac{۱}{۴}}}{a^{\frac{۱}{۴}}}\right)^{-۴}=$$

$$=\frac{b}{a}$$

مثال ۲. این عبارت را ساده کنید :

$$\left(\frac{a+a^{\frac{۱}{۴}}b^{\frac{۳}{۴}}}{a^{\frac{۱}{۲}}+a^{\frac{۱}{۴}}b^{\frac{۱}{۴}}}-a^{\frac{۱}{۴}}b^{\frac{۱}{۴}}\right):\left(a^{\frac{۱}{۴}}-b^{\frac{۱}{۴}}\right)$$

حل . دانش‌آموزان معمولاً این‌مثال را به‌طریق زیر حل می‌کنند:

$$\left(\frac{a+\sqrt[4]{ab^{3}}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}-\sqrt[4]{ab}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)=$$

$$=\frac{a+\sqrt[4]{ab^{3}}-\sqrt{a}\sqrt[4]{ab}-\sqrt[4]{a^{2}b^{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}:\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)=$$

$$=\frac{a+\sqrt[4]{ab^{3}}-\sqrt[4]{a^{3}b}-\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}=$$

$$=\frac{a+\sqrt[4]{ab^{3}}-\sqrt[4]{a^{3}b}-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{a^{3}}+\sqrt[4]{a^{2}b}-\sqrt[4]{a^{2}b}-\sqrt[4]{ab^{2}}}=$$

$$=\frac{a+\sqrt[4]{ab^{3}}-\sqrt[4]{a^{3}b}-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{a^{3}}-\sqrt[4]{ab^{2}}}$$

و درهمین‌جا متوقف می‌شوند . حالاً به راه حلی که مورد نظر ماست ، می‌پردازیم :

$$\left(\frac{a+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right):\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)=$$

$$=\left[\frac{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right]:\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)=$$

$$=\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right]:\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)=$$

$$=\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^{2}:\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}$$

بعد از تعمیم مفهوم نما و حل معادلات نمائی مقدماتی ، باید به مطالعهٔ تابع‌نمائی به‌صورت $y=a^x$ پرداخت ، که در آن $x$ صحیح یا کسری ، مثبت یا منفی ، وهمچنین‌گنگ باشد ($a>0$ و $a\neq 1$) . ضمناً باید برای دانش‌آموزان شرایط زیررا درنظرگرفت: ۱) پایهٔ تابع‌نمائی $a^x$ مساوی واحد نیست ($a\neq 1$) ؛ ۲) پایه همیشه مثبت انتخاب‌می‌شود ($a>0$) ؛ ۳) تنها ریشهٔ حسابی مقادیر تابع‌نمائی اختیار می‌شود .

معلم باید اغلب این شرایط را بخاطر آورد،حتی بدون‌استدلال، ضمناً دوشرط اول را می‌توان بطورکامل روشن کرد .

درحقیقت اگر پایه را مساوی واحد انتخاب کنیم ($a=1$)، توان

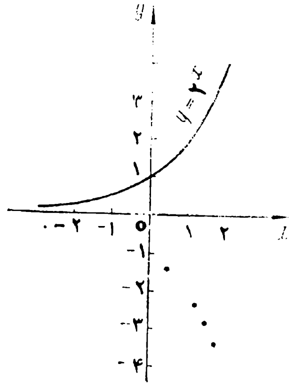
$1^x$ ، به ازای همهٔ مقادیر $x$ ، مساوی واحد می‌شود ، وچون این‌مقدار ثابت است ، $y=1$ بدست می‌آید وبنابراین تابع $a^x$ به ازای $a=1$، تابع نمائی به حساب نمی‌آید .

اگر شرط دوم $(a>0)$ را قبول نکنیم ، تابع می‌تواند پایهٔ منفی $(a<0)$ اختیار کند و وقتی‌که نما عددی کسری با مخرج زوج باشد ، مساوی مقداری موهومی خواهد شد. مثلاً به ازای $a=-2$ و $x=\frac{1}{2}$ خواهیم داشت $y=(-2)^{\frac{1}{2}}$ ومقدار موهومی تابع درجبر مقدماتی مورد مطالعه قرار نمی‌گیرد .

اگر برای یك تابع‌نمائی دوشرط اول را درنظر بگیریم وشرط سوم را به حساب نیاوریم ، می‌توانیم برای تابع یك رشته مقادیر منفی بدست‌آوریم و این مقادیر یك منحنی متصل را تشکیل نمی‌دهند .

مثلاً تابع $y=2^x$ را درنظر می‌گیریم . منحنی این تابع را رسم می‌کنیم (شکل۱۲). به‌این ترتیب منحنی تابع $y=2^x$ ، علاوه برنقاطی‌که بالای محور $ox$ قرارگرفته‌اند ، نقاطی هم زیر محور $ox$ بدست می‌آید که متعلق به‌یك منحنی متصل نیستند .

معلم باید لزوم شرط اخیر را بروشنی نشان دهد .



شکل ۱۲

دانش‌آموزان باید بخوبی خواص زیررامربوط به‌تابع‌نمائی فراگیرند: خواص‌تابع‌نمائی‌وقتی که‌پایه‌مثبت‌است،خصوصیت‌تغییر این تابع وقتی که پایــه بزرگتر یا کوچکتر ازواحد است ،همچنین وقتی که‌آوند مثبت یا منفی باشد. این‌خواص‌تابع‌نمائی‌وخصوصیت مربوط به تغییر آن‌برای مطالعهٔ خواص تابع لگــاریتمی وخصوصیت تغییر آن بسیار مهم است .

آموزش خواص تابع‌نمائی وخصوصیت تغییرات آن‌باید بارسم منحنی مربوطه همراه باشد . مثلاً باید منحنی توابع :

$$y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x ، y=۱۰^x ، y=۲^x$$

را دریك دستگاه محورهای مختصات رسم کرد . برای رسم منحنی‌این توابع نمائی باید دانش‌آموزان را متوجه نکات زیر کرد: همهٔ منحنیها محور oy را دریك نقطهٔ مشترك قطع می‌کنند $(y=۱)$ ، همهٔ منحنیها فقط دریك‌طرف محور ox قرار دارند و بنابراین نقاط با عرض منفی روی آنها وجود ندارد ، دریکی از حالتهایی که x به‌سمت $+\infty$ یــا

$\infty$ — میل می‌کند ، منحنیها به‌طرف محور ox نزدیك می‌شوند . در بین این سه‌منحنی ، دومنحنی وجود دارد که نسبت به محور oy قرینهٔ یکدیگرند :

$$y=۲^x \quad و \quad y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x=۲^{-x}$$

قبل از آنکه به بحث دربارهٔ آموزش لگاریتم بپردازیم، نواقصی را که تقریباً همه‌جا در آموزش دبیرستانی لگاریتم وجود دارد، متذکر می‌شویم .

دانش‌آموزان، ارتباط بین عدد و لگاریتم آن‌را بطورمبهم تصور می‌کنند، در حالی‌که نظریـهٔ لگاریتم اعشاری را نمی‌دانند . معمولاً قواعدی را که درجدولهای لگاریتم بکارمی‌رود، بخوبی می‌دانند، ولی نتایجی‌که از این قواعد بدست می‌آید ، در بسیاری از مدارس بطور کلی مورد مطالعه قرار نمی‌گیرد . دانش‌آموزان نمی‌توانند ، ضمن تمرینات ، روشن‌کنند که چرا مانتیس خواص معینی دارد ، چرا برای تعیین مفسر فلان مقدار واحد انتخاب می‌کنیم ، چرا باید عبارت‌عددی لگاریتم اعشاری را به دوقسمت‌مستقل تقسیم‌کنیم وغیره . علاوه‌بر آن، دانش‌آموزان‌نمی‌توانندازعهدهٔ لگاریتم‌گرفتن‌ازعبارتهای بغرنج بر آیند، بخصوص اگر این عبارت شامل مجموع باشد .

علت نقص آموزش لگاریتم را باید دراین واقعیت جستجو کرد که در دورهٔ دبیرستان به‌نظریه(تئوری) کم اهمیت داده می‌شود. بسیاری ازمعلمین ریاضی گمان می‌کنند که لگاریتم تنها برای محاسبات مفصل لازم است، ولی این فکر کاملاً نادرست است. درحقیقت به‌همان اندازه که لگاریتم مورد استفادهٔ عملی دارد ، ازلحاظ نظری هم (به عنوان تابع) اهمیت فوق‌العاده دارد . تابع‌نمائی و تابع لگاریتمی بطور وسیعی درعلوم تجربی وصنعت‌مورد استفاده دارد؛بسیاری ازپدیده‌های علوم تجربی و صنعت طبق قوانینی جریان دارند که با زبان ریاضی به‌وسیلهٔ توابع‌نمائی ولگاریتمی بیان‌می‌شوند. علاوه برآن‌تمام‌تدریس جبر براساس ارتباط تابعی مقادیر قرار دارد . به این ترتیب که دانش‌آموزان ابتدا با توابع جبری خطی و درجه دوم آشنا می‌شوند و سپس با توابع‌نمائی و لگاریتمی .

آموزش لگاریتم را می‌توان به سه‌قسمت تقسیم کرد :

۱) تعریف لگاریتم ومطالعهٔ خواص اساسی‌آن ؛

۲) نتیجه‌گیری قواعد لگاریتم‌گرفتن وفراگیری عملیات‌مربوط به لگاریتم گرفتن ؛

۳) مطالعهٔ خواص لگاریتم اعشاری ، ایجاد مهارت وعادت در

استفاده ازجدولهای لگاریتم .

مـا بیشتر روی مطالبی تکیه می‌کنیم که مـربوط به نظریـهٔ لگاریتم است .

ازقسمت اول شروع می‌کنیم . بهتر است که آموزش لگاریتم را در دبیرستان ، ازمطالعهٔ جدول شتیفل شروع کنیم :

$$\ldots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$$

$$\ldots, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, ۴, ۸, \ldots$$

که متناظر با تاریخ بوجود آمدن لگاریتم است و به‌درك سریعترمقادیر لگاریتم کمك می‌کند . باید نظر دانش‌آموزان را بـه این نکته جلب کرد که عملیات ضرب ، تقسیم ، به توان رساندن و ریشه‌گرفتن را برای دوعدد دلخواهی که درجدول قراردارند ، می‌توان به عملیات جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم نماهای آنها تغییر داد .

به این ترتیب ، بعد ازآموزش جدول شتیفل ، تصور روشنی از فکر اصلی محاسبات لگاریتمی ، برای دانش‌آموزان بوجود می‌آید (اطلاع براین مطلب که می‌توان عملیات از مراحل بالاتر را به عملیات ازمراحل پایین‌تر ، تبدیل نمود) .

ضمن انجام تمرینات محاسبه‌ای به کمك جدول شتیفل ، بـاید

دانش‌آموزان را متوجه این نکته کرد که می‌توان تنها به‌کمك اعدادی که دراین جدول هست ، از عهدهٔ انجام محاسبات برآمد (اگر چه می‌توان جدول را هم از راه درج واسطه‌های هندسی و عددی وسیع‌تر کرد) . برای اینکه جدول برای همهٔ عددها کافی باشد ، باید هرعدد را به‌عنوان توانی با تنها یك پایهٔ مشخص درنظر گرفت (وجود جواب حقیقی معادلهٔ $a^x=b$ ) .

برای آموزش جدول ، معمولاً تعریف لگاریتم داده می‌شود ، یعنی: لگاریتم عدد مفروض‌درمبنای مفروض عبارت‌است ازنمای‌توانی که پایهٔ‌آن مبنای مفروض وحاصل‌آن عدد مفروض باشد .

دانش‌آموزان تعریف لگاریتم را معمولاً می‌دانند ، ولی تصور روشنی ازماهیت لگاریتم (اینکه لگاریتم یعنی چه ؟) برای‌آنها بوجود نمی‌آید ، زیرا بسیاری از آنها ، اتحاد زیر را که نتیجه‌ای از تعریف لگاریتم است ، نمی‌فهمند :

$$a^{\log_a N} = N$$

مثلاً‌درمقابل این سؤال‌که $۱۰^{\log ۵}$ مساوی چه عددی است ، عدهٔ کمی از دانش‌آموزان جواب می‌دهند و اکثر آنها قادر به جواب دادن نیستند . این واقعیت به‌معنای این نیست‌که این اتحاد درکتابهای

درسی مورد بررسی قرار نمی‌گیرد، بلکه به‌این معناست که دانش‌آموزان تصور روشنی ازمفهوم دوطرفه بودن اصطلاحاتی، که نتیجهٔ عملیات و طرزنوشتن آن را نشان می‌دهد ، ندارند . مثلاً برای توضیح عمل به توان رساندن ، باید متذکر شد که توان نه فقط به نتیجه ، بلکه به خود نوشتهٔ این عمل ($a^n$) هم نامیده می‌شود . در مورد خصوصیت دوطرفهٔ اصطلاحات باید از ابتدای آموزش جبر توجه کرد و درتمام مراحل بعدی آن‌را تعقیب‌نمود.

به‌این ترتیب ، اگرمثلاً دانش‌آموزان خوب فهمیده باشند که لگاریتم عدد ۴ درمبنای ۲ نه‌تنها برابر است‌با ۲ ، بلکه با خود علامت $log_۲۴$ هم برابر است ، دراین‌صورت به این سؤال‌که $۲^{log_۲۴}$ چقدر است ، بخوبی جواب خواهند داد.

بعد از تعریف لگاریتم بطور شفاهی ، باید طرز نوشتن علامتی آن‌را هم (به‌کمك‌حروف) مطرح کرد.چون‌علامت $log_a N$ عبارت‌است ازعددی که اگر a را به توان آن عدد برسانیم ، عدد N بدست آید ، بنابراین نتیجه می‌شود :

$$a^{log_a N} = N$$

این اتحاد را به طریقهٔ دیگری هم می‌توان نتیجه‌گرفت ، فرض

می کنیم :

$$\log_a N = x \qquad (1)$$

دراین‌صورت طبق‌تعریف لگاریتم خواهیم داشت:

$$a^x = N \qquad (2)$$

حالا اگر در تساوی (۲) به‌جای x ، مقدارش را از رابطهٔ (۱) قرار دهیم ، بدست می‌آید :

$$a^{\log_a N} = N$$

بعد از روشن کردن این اتحاد ، می‌توان از آن برای بدست آوردن روابط ، لگاریتم گرفتن و خواص لگاریتم استفاده کرد .

درحقیقت ، اگر دو اتحاد زیر را درنظر بگیریم :

$$N = a^{\log_a N} \quad \text{و} \quad N_1 = a^{\log_a N_1}$$

مثلاً با ضرب آنها دریکدیگر بدست می‌آید :

$$N \cdot N_1 = a^{\log_a N + \log_a N_1}$$

که از آنجا نتیجه می‌شود :

$$\log_a (N \cdot N_1) = \log_a N + \log_a N_1$$

سپس براساس همین اتحاد، رابطهٔ عبور ازیك‌دستگاه لگاریتمی به دستگاه دیگر را نتیجه می‌گیریم.

اگر ازطرفین اتحاد درمبنای b لگاریتم بگیریم، بدست‌می‌آید:

$$\log_b N = \log_b\left(a^{\log_a N}\right) \Rightarrow \log_b N = \log_a N \cdot \log_b a,$$

که از آنجا نتیجه می‌شود :

$$\log_a N = \frac{۱}{\log_b a}\log_b N$$

در این رابطه $\frac{۱}{\log_b a}$ را مدول عبور از یك دستگاه به دستگاه دیگر لگاریتمی گویند .

اگر $a = e = ۲,۷۱۸۲۸\ldots$ و $b = ۱۰$ بگیریم، به این رابطه می‌رسیم :

$$\ln N = \frac{۱}{\lg e}\lg N$$

که در آن $\frac{۱}{\lg e} = ۲,۳۰۲۵۸\ldots$ می‌باشد .

اگر $a = ۱۰$ و $b = e$ باشد ، رابطهٔ عبور از دستگاه طبیعی لگاریتم به دستگاه اعشاری بدست می‌آید :

$$\lg N = \frac{۱}{\ln ۱۰}\ln N$$

که در آن $\frac{۱}{\ln ۱۰} = ۰٫۴۳۴۲۹\ldots$ می‌باشد .

بـایذ متذکر شد که مسئلهٔ مربوط به مدول عبور از یك دستگاه لگاریتمی به دستگاه دیگر ، در کتابهای درسی دبیرستانی مطرح نشده است و در برنامهٔ دبیرستان هم وجود ندارد ، ولی بحث آن برای درك بهتر مفهوم لگاریتم ضروری است .

سپس باید به تساوی $x = log_a N$ پرداخت که با تساوی $N = a^x$ معادل است .

در تساوی $x = log_a N$ سه‌مقدار ( $N$، $a$، $x$ ) داخل شده است و بنابراین سه‌نوع مسئله خواهیم داشت .

حل مسائل مختلف عددی درحالتهای سه‌گانه ، کمك می‌کند که دانش‌آموزان مفهوم لگاریتم را بهتر فرا گیرند . همراه با حل اینگونه مسائل ، باید به‌آموزش خواص اساسی لگاریتم پرداخت . ضمن‌مطالعهٔ این خواص باید در عین‌حال خواص متناظر توابع‌نمائی ، نمایش این خواص به وسیلهٔ رسم منحنی و حل مثالهای مربوطه را مـورد گفتگو قرار داد .

مثلاً برای مطالعهٔ این خاصیت لگاریتم که «عدد منفی در مبنای مثبت، لگاریتم ندارد» ، ابتدا تساوی $x = log_a(-N)$ را می‌نویسیم، سپس آن‌را به‌صورت $a^x = -N$ درمی‌آوریم . دراینجا ازاین‌خاصیت

استفاده می کنیم که : اگرعدد مثبتی را به‌توان عدد دلخواهی برسانیم، همیشه عددی مثبت بدست می‌آید . بعد منحنی نمایش تابع‌نمائی را رسم می کنیم و دانش‌آموزان را متوجه این نکته می کنیم که تمام‌منحنی دریك‌طرف محور ox و دربالای آن قراردارد، یعنی مقادیر تابع‌نمائی همیشه مثبت است . بعد یك رشته تمرین حل می کنیم که نشان دهد : عددهای منفی درمبنای منفی می‌توانند لگاریتم داشته باشند.درعین‌حال متذکر می‌شویم که وقتی معلم به‌دانش‌آموزان می‌گوید: «عددهای‌منفی درمبنای مثبت لگاریتم ندارند» و «عدد مثبت، وقتی که مبنا مثبت‌باشد، فقط یك لگاریتم دارد» ، جملاتی کاملاً صحیح بیان نمی‌کند . همهٔ این مطالب برای حوزهٔ عددهای حقیقی‌صحیح است؛ درحوزهٔعددهای مختلط ، لگاریتم خواص دیگری دارد که باید هرمعلمی از آنها اطلاع داشته باشد . در حوزهٔ عددهای مختلط ، تابع نمائی متناوب است و لگاریتم هم چند ارزشی است (و این مطلب بسادگی با رابطهٔ اولر $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ ثابت می‌شود) . در این حوزه هر عددی دارای لگاریتم است وبنابراین عدد منفی هم درمبنای مثبت لگاریتم دارد .

پس ازمطالعهٔ همهٔ خواص لگاریتم ، باید منحنی نمایش تابع لگاریتمی‌را درمبناهای مختلف ( ۱۰،۲ ، $\frac{۱}{۲}$) رسم کرد .

سپس باید منحنی بدست آمده ، ومثلاً منحنی تابع $y = log_۲ x$ را (که می‌تواند به‌صورت $x = ۲^y$ نوشته شود) ، با منحنی تابع نمائی $y = ۲^x$ مقایسه کرد. درمقایسه‌دانش آموزان می‌بینند که تفاوت‌معادله‌های $x = ۲^y$ و $y = ۲^x$ دراین‌است که‌حرفهای x و y جای‌خودرا باهم‌عوض کرده‌اند،وبنابراین به‌این نتیجه می‌رسند که از هردوی آنهایك منحنی بدست می‌آید که اختلاف آنها تنها در وضع استقرار آنها نسبت به محورهای مختصات است .

بعد از رسم منحنی تابع لگاریتمی $y = log_۲ x$ باید توجه دانش‌آموزان را به قسمتی از منحنی جلب کرد که مقدار x کوچکتر از واحد است و به‌صفر نزدیك می‌شود .

اگر x مقادیر $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۱}{۱۶}$ ،....، $\frac{۱}{۲^n}$ را قبول‌کند ، y مقادیر متناظر ۲ــ ،۴ــ ،....،nــ را قبول خواهد کرد . وقتی که n خیلی بزرگ باشد ، مقدار $\frac{۱}{۲^n}$ خیلی کوچك خواهد بود . به این ترتیب لگاریتم عددهایی که نزدیك به‌صفرند ، در مبنای بزرگتر از واحد ، عددهای منفی هستند که ازلحاظ قدرمطلق بزرگند ، یعنی وقتی که عدد به‌سمت صفر میل‌می‌کند، لگاریتم آن به‌سمت ∞ــ میل خواهدکرد .

همهٔ این استدلالها باید همراه با رسم منحنی تابع لگاریتمی باشد .

در مطالعهٔ خواص لگاریتم در دبیرستان ، این مطلب مورد بحث قرار نمی‌گیرد که واحد و لگاریتمهای عددها مقیاس مشترك ندارند ؛ و این یك غفلت بزرگ است ، زیرا ضمن آن می‌توان دانش آموزان را باروش‌مقدماتی‌محاسبهٔ تقریبی‌لگاریتم آشنا کرد(روشهای‌نپرو بریگس). درعمل ازاین روشهای مقدماتی استفاده نمی‌کنند و لگاریتمهارا به‌کمك رشتهٔ لگاریتمی محاسبه می‌کنند که هم سریع‌تر است وهم نتیجهٔلازم‌را با دقت زیاد بدست می‌دهد . علاوه بر آن ، برای محاسبهٔ مقادیربینابینی لگاریتم از رابطهٔ درج واسطه‌هـا استفاده می‌کنند . ولـی این روشها برای دانش‌آموزان قابل طرح نیست .

ما گمان می‌کنیم که آشنائی دانش‌آموزان دبیرستانها با یکی از روشهای مقدماتی محاسبهٔ لگاریتمهالازم است. بسیاری ازدانش‌آموزان نمی‌توانند تصور روشنی ازماهیت این مطلب داشته باشند که مثلاً در جدول لگاریتم ، عدد ۴۷۷۱۲ درمقابل عدد ۳ قرارگرفته است . وقتی کـه از دانش‌آموزان سؤال شود ، مانتیس عدد ۱ چیست ، جواب می‌دهند : «پنج صفر» و اگر ازجدولهای چهار رقمی استفاده می‌کنند ، می‌گویند : «چهار صفر» ؛ ولی از اینجا نمی‌توان این نتیجه را گرفت که‌آنها تصور روشنی ازمفهوم مانتیس دارند. بعد ازآنکه‌دانش‌آموزان را به یکی از روشهای مقدماتی محـاسبهٔ لگاریتمهای جـدول لگاریتم

آشنا کنیم (ولو اینکه به‌علت عدم درك آنها از روشهای ریاضیات عالی اطلاعی پیدا نکنند)، مفهوم مانتیس برای آنها روشن می‌شود .

ضمن اینکه یکی از روشهای تقریبی پیدا کردن لگاریتمها را مورد بحث قرار می‌دهیم ، باید توجه دانش‌آموزان را به‌این نکته‌جلب کرد که با محاسبهٔ تقریبی لگاریتمها ، نشان داده می‌شود که هرعدد مثبتی لگاریتم دارد ، یعنی قضیهٔ اصلی نظریهٔ لگاریتم (جواب تقریبی معادلهٔ $a^x = b$ ) روشن می‌شود .

حالا به مرحلهٔ دوم آموزش لگاریتم می‌پردازیم . دراین مورداین هدف وجود دارد : باید دانش‌آموزان به لگاریتم‌گرفتن عادت کنند و خواص لگاریتم را بخوبی فرا گیرند . ابتدا چهار قضیهٔ اصلی لگاریتم ثابت می‌شوند : قضایای مربوط به ضرب ، تقسیم ، توان و ریشه ، که تمام جریان لگاریتم‌گرفتن براساس آنها قرارگرفته است .

اثبات این قضایا خیلی ساده است و بنابراین موجب اشکال خاصی نمی‌شود . با وجود این ، دراینجا هم لحظاتی وجود دارد که باید مورد توجه قرارگیرد . بنظر می‌رسد که دانش‌آموزان باید بخوبی ازعهدهٔ لگاریتم‌گرفتن برآیند ، ولی کار به‌همین سادگی هم نمی‌گذرد. مثلاً آنها عادت ندارند که عمل لگاریتم گرفتن را درمورد هرعبارتی به‌آخر برسانند وهمیشه نمی‌توانند دراین مورد خود را توجیه کنند که

ازمجموع وتفاضل نمی‌شود لگاریتم‌گرفت* .

این نقص از اینجا بوجود می‌آید که دراغلب کتابهای درسی در مورد لگاریتم‌گرفتن ازعبارتها ، مثالها و تمرینهای کمی داده شده است (وبخصوص درمورد عبارتهای شامل مجموع و تفاضل) . علاوه بر آن تمریناتی هم که داده شده است خیلی ساده است ونمونه‌های بغرنج‌تر در آنها وجود ندارد .

باعث تأسف است که حتی یك تمرین از این قبیل وجودندارد که مثلاً ازعبارتهای زیرلگاریتم بگیرید:

$$N=\frac{x^{۴}-x^{۲}}{y^{۳}+۳y^{۲}+۳y+۱}\ ,\ N=\frac{۱}{\sqrt{۲۷m^{۴}y-my}}\ ,\ \ldots$$

بـرای لگاریتم گـرفتن ازاین عبارتها ، باید قبلاً مجموعها و تفاضلهای موجود را به صورت ضرب عوامل تبدیل کرد . این تمرینها از این‌جهت هم مفید است‌که روشها و روابط مربوط به‌تجزیهٔ عبارتها را برای‌آنها تکرار می‌کند . علاوه بر آن دانش‌آموزان شروع به درك این مطلب می‌کنند که درجای معینی باید لگاریتم‌گرفتن را خاتمه داد. لگاریتم گرفتن از چنین عبارتهایی در مدارس عالی ، ضمن فرا گرفتن

*) **گوس** ، جدولهای خاصی تهیه‌کرده است‌که به‌کمك آنها می‌توان با معلوم بودن $\lg x$ و $\lg y$ ، مقدار $\lg(x+y)$ را محاسبه‌کرد .

محاسبات دیفرانسیلی ، مورد استفاده قرارخواهندگرفت .

ضمن حل مثالهای مربوط به لگاریتم گرفتن ، باید به مسائل شفاهی اهمیت زیاد داد ، مثلا : در یک مبنای مفروض وقتی عددی سه‌برابر شود ، لگاریتم آن چه تغییری می کند ؟ اگر عدد را ۵ برابر کوچك کنیم، لگاریتم آن چه می‌شود؟ اگر لگاریتم عددی نصف شود، عدد چه تغییری می کند ؟

این مسائل به این مناسبت لازم است که ارتباط بین‌عدد و لگاریتم آن بخوبی شناخته شود و این مطلب به‌نوبهٔ خود تصور روشن‌تری از خواص مفسر ومانتیس بوجود می آورد .

در کتابهای درسی معمولاً دربارهٔ عکس عمل لگاریتم‌گرفتن به‌جمله‌هائی از این قبیل برمی‌خوریم : وقتی‌که بتوانیم ازعملی لگاریتم بگیریم ، می‌توانیم برعکس با در دست داشتن نتیجهٔ لگاریتم‌گیری ، عبارتی را پیدا کردکه این نتیجه از آن بدست‌آمده است . این بیان از این‌جهت‌کافی نیست که دانش‌آموزان بخوبی به عکس عمل لگاریتم‌گرفتن (که برای حل معادلات‌لگاریتمی لازم است)، مسلط نمی‌شوند.

درعکس عمل لگاریتم‌گرفتن‌گاهی اشتباهاتی‌ازاین قبیل‌می‌شود که علامت‌لگاریتم‌را می‌اندازندومثلاً می‌نویسند: $\lg a+\lg b=ab$ .

به این مسئله توجه کنید : مقدار x را با در دست داشتن لگاریتم آن پیدا کنید :

$$\log x = ۲\log a + ۳\log b - ۵\log c$$

این مسئلهٔ سادهای از حل معادلات لگاریتمی است . دانش‌آموزان خیلی زودجواب آن‌را بدست می‌آورند :

$$x = \frac{a^۲ b^۳}{c^۵}$$

درحل چنین مسئله‌ای ، دانش‌آموزان عادت دارند که علامت لگاریتم را حذف کنند. برای رفع این اشکال باید دانش‌آموزان روابط لگاریتم گرفتن را درجهت عکس بخوبی بدانند :

$$\log_a m + \log_a n = \log_a (mn),$$

$$\log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n}, \ldots$$

علاوه بر آن مسائلی از این قبیل باید طرح کرد : عبارت زیر را به‌صورت یك لگاریتم درآورید:

$$۲\log a + ۳\log b - ۵\log c$$

دانش‌آموزانی که روابط مربوطه را بدانند ، دراین مورد می‌نویسند :

$$۲\log a + ۳\log b - ۵\log c = \log \frac{a^۲ b^۳}{c^۵}$$

برای اینکه دانش‌آموزان متوجه شوند که این عمل، عکس عمل لگاریتم گرفتن است، باید آنها را وادار کرد که درمورد هر مسئله باعمل لگاریتم گرفتن ازجواب، صحت آنرا آزمایش کنند. مثلاً می‌خواهیم عبارت زیر را به‌صورت یك لگاریتم درآوریم:

$$\frac{1}{4}(3\lg m+5\lg n-7\lg p)$$

حل :

$$\frac{1}{4}(3\lg m+5\lg n-7\lg p)=\lg\sqrt[4]{\frac{m^3n^5}{p^7}}$$

آزمایش :

$$\lg\sqrt[4]{\frac{m^3n^5}{p^7}}=\frac{1}{4}(3\lg m+5\lg n-7\lg p)$$

معمولاً ، دانش‌آموزان بدون هیچ اشکالی تساوی زیر را ساده می‌کنند :

$$\frac{1}{2}\lg a-2\lg b=\lg x+\lg y$$

ولی وقتی که آنرا به‌صورت زیر داده باشند :

$$\frac{\frac{1}{2}\lg a-2\lg b}{\lg x+\lg y}=1$$

بسیاری ازدانش‌آموزان ، ضمن ساده کردن آن ، دچار اشتباه می‌شوند.

حالا بطور خلاصه به مرحلهٔسوم آموزش لگاریتم می‌پردازیم . به مناسبت حجم کار دراین قسمت ، در دبیرستان اهمیت زیـادی به آن داده می‌شود .

در این قسمت خواص لگاریتم اعشاری ، کلگاریتم و محاسبه به کمك جدولهای لگاریتم مورد مطالعه قرارمی‌گیرد.

خواص لگاریتم اعشاری‌براساس دوقضیه است: تعدادواحدهای مفسر وغیرقابل تغییربودن مانتیس ضمن ضرب یا تقسیم عدد در توانی از ۱۰ . اثبات این قضایا مشکل نیست .

آموزش خواص لگاریتم اعشاری بـاید این نتیجه را بـرای دانش‌آموزان داشته باشد که نه‌تنها بتوانند قضایا را اثبات کنند ، بلکه بتوانند بروشنی پیش خود تصور کنند کـه مثلا جدا کردن لگـاریتم اعشاری به مفسر و مانتیس تا چه اندازه برای فرار از شکل ظاهـری عددهای کوچکتر از واحد ، لازم است .

اغلب معلمین برای آموزش «لگاریتم» تمام کوشش خـود را صرف طریقهٔ عمل با جدولهای لگاریتم می‌کنند.درنتیجه‌دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که چگونه مفسر و مـانتیس عـدد را پیدا کنند ، ولـی

نمی‌توانند توضیح دهند که چرا باید به این طریق (و نه طریق دیگری) عمل کرد.

ضمن مطالعهٔ لگاریتم اعشاری باید این مطلب را هم روشن کرد که چرا برای محاسبات از لگاریتم اعشاری استفاده می‌شود و نه از لگاریتم طبیعی.

برای محاسبهٔ عبارتهای بغرنج به کمك لگاریتم به جمع و تفریق بعضی لگاریتمها برخورد می‌کنیم، برای اینکه عمل تفریق کردن را حذف کنیم، روش کلگاریتم را بکار می‌بریم که عمل تفریق لگاریتمها را بـه جمع تبدیل می‌کند. در کتابهای درسی به این مطلب اهمیت کمـی داده شده است و مثلا اغلب حتی تعریف و قاعدهٔ پیدا کـردن کلگاریتم داده نمی‌شود و تنها گفته می‌شود که امکان تبدیل تفریق بـه جمع وجود دارد.

مفهوم کلگاریتم را چگونه باید توضیح داد؟ توضیح کلگاریتم باید بـه این تـرتیب انجام گیرد: ۱) امکان تبدیل تفریق بـه جمع، ۲) تعریف کلگاریتم، ۳) محاسبهٔ کلگاریتم، ۴) انجام محاسبه بـا استفاده از کلگاریتم.

هریك از این مراحل را مورد بحث قرار می‌دهیم.

برای اینکه لزوم تبدیل تفریق بـه جمع را روشن کنیم ، بـاید مثالهایی از این نوع را طرح کرد :

$$x=\frac{ab}{cd}$$

برای محاسبهٔ لگاریتم x بـاید سه عمل انجام داد : جمع ، جمع و تفریق . در اینجا باید این سؤال را در مقابل دانش‌آموزان قرار داد : آیا نمی‌شود محاسبه را ، با تبدیل دو نوع عمل به یك‌نوع ، ساده کرد؟ بنظر می‌رسد که این ساده کردن را می‌توان با تبدیل عمل تفریق به‌جمع انجام داد .

برای اینکه تعریف کلگاریتم را بدهیم، عبارت $x=\frac{a}{b}$ را در نظر می‌گیریم و آنرا به صورت $x=a\cdot\frac{1}{b}$ می‌نویسیم . بـا لگاریتم گرفتن ازاین رابطه بدست می‌آید :

$$\lg x=\lg a+(0-\lg b)$$

بنابراین می‌توان تفریق را به جمع تبدیل کرد ، یعنی به $\lg a$ ، تفاضل $(0-\lg b)$ را اضافه کرد .

حالا مـی‌توان تعریف کلگاریتم را داد : اختلاف بین صفر و لگاریتم عدد مفروض را کلگاریتم گویند .

کلگاریتم b را به‌صورت colgb نشان می‌دهند، که در آن co حروف اول کلمهٔ لاتینی Complementum (متمم) است و به‌همین مناسبت کلگاریتم را لگاریتم متمم هم‌گویند .

بنابراین تساوی قبل را می‌توان چنین نوشت :

$$\lg x = \lg a + \operatorname{colg} b$$

اگر $b=a$ باشد ، $x=۱$ می‌شود وبدست می‌آید :

$$\lg a + \operatorname{colg} a = ۰$$

برای محاسبهٔ کلگاریتم یك عدد، باید لگاریتم آن‌را ازصفر کم کرد . به این ترتیب :

$$\lg b = \bar{۳},۴۲۵۷ \Rightarrow \operatorname{colg} b = ۰ - \bar{۳},۴۲۵۷ = ۲,۵۷۴۳$$

برای تفریق باید یك واحد از مفسر کـم کـرد (قرض گرفت) . بـاید دانش‌آموزان‌راواداشت تا ازعددهای ۲،۳،۷ —،... و بالاخره ازصفر یك واحد کم کنند .

بالاخره می‌توان قاعدهٔ زیر را برای پیدا کردن کلگاریتم داد : برای محاسبهٔ کلگاریتم یك عدد باید مفسرلگاریتم آن‌را از ۱ — ومفسر لگاریتم آن‌را از ۱+ کم‌کرد .

سپس باید یك رشته تمرین بـه دانش‌آمـوزان دادکه بتوانند

بسرعت مفسررا پیدا کنند، مثلا: (+۵)−(−۱) ؛ (+۴)−(−۱)؛ (−۶)−(−۱)؛(−۹)−(−۱) .

محاسبه به‌کمك کلگاریتم اشکالی برای دانش‌آموزان بوجود نمی‌آورد ، منتهی باید به رابطهٔ زیر توجه‌کرد :

$$_{\text{متمم}}(n\,\mathrm{lg}\,b)=n(_{\text{متمم}}\mathrm{lg}\,b)$$

فرض می‌کنیم $x=\frac{a}{b^n}$ یا $x=a\cdot\frac{1}{b^n}$ . با لگاریتم گرفتن بدست می‌آید :

$$\mathrm{lg}\,x=\mathrm{lg}\,a+(0-n\,\mathrm{lg}\,b)$$

از آنجا :

$$0-n\,\mathrm{lg}\,b={}_{\text{متمم}}(n\,\mathrm{lg}\,b)$$

ازطرف دیگر داریم :

$$0-n\,\mathrm{lg}\,b=n(0-\mathrm{lg}\,b)=n(_{\text{متمم}}\mathrm{lg}\,b)$$

و به این ترتیب خواهیم داشت :

$$_{\text{متمم}}(n\,\mathrm{lg}\,b)=n(_{\text{متمم}}\mathrm{lg}\,b)$$

این رابطه از این‌جهت اهمیت دارد که دانش‌آموزان ، ضمن محاسبات ، به این سؤال برخورد می‌کنند : آیا باید ابتدا lgb را در n ضرب کرد وبعد متمم آن را بدست آورد، یا برعکس اول‌متمم lgb

را محاسبه کرد و بعد در n ضرب کرد ؟ این مطلب را باید ابتدادرمورد مثالهای مشخص روشن کرد وسپس رابطه را درحالت کلی طرح کرد .

محاسبات لگاریتمی را باید به صورت عادت محکمی برای دانش‌آموزان درآورد . ولی اغلب نوع محاسبات لگاریتمی ، بطور جدی مورد توجه قرارنمی‌گیرد ونتیجه این‌کار آن‌است‌که دانش‌آموزان به‌کندی و بدون دقت به محاسبه می‌پردازند که اکثر منجر به اشتباه می‌شود .

درکتابهای درسی ، روش معینی برای محاسبات لگاریتمی وجود ندارد و به‌همین مناسبت حتی دریك مدرسه هم، معلمین مختلف‌از روشهای مختلفی استفاده می‌کنند. به‌همین مناسبت لازم‌است دربارهٔ این روشها صحبت‌کنیم .

مسئلهٔ مربوط به ردیف عملیات در محاسبات لگاریتمی ، برای دانش‌آموزان دبیرستان اهمیت جدی دارد . دانش‌آموزان باید همهٔ عملیات فرعی را در ردیف عملیات اصلی انجام دهند . بسیاری از معلمین به دانش‌آموزان توصیه می‌کنندکه برای عملیات فرعی ازکاغذ دیگری استفاده‌کنند . این‌کار صحیح نیست ، باید دانش‌آموزان را وادارکردکه هرعملی‌که انجام آن در ذهن ممکن نیست ، روی کاغذ آورده شود .

برای نوع ترتیب عملیات فرعی و اصلی دو نظر وجود دارد . بعضی توصیه می‌کنند که باید صفحهٔ کاغذ را به دوقسمت تقسیم کرد : درنیمهٔ چپ کاغذ عملیات اصلی را انجام داد (جمع لگاریتمها و پیدا کردن عدد مجهول) و در نیمهٔ راست کاغذ عملیات فرعی را . دیگران توصیه می‌کنند که باید عملیات را به همان ترتیبی که انجام آنها لازم است ، بطور منظم نوشت ، زیرا دانش‌آموزان از ابتدای آشنائی با حساب به همین روش عادت کرده‌اند .

به اعتقاد ما این مطلب اساسی نیست ، یعنی می‌توان یکی از این دو نظر را انتخاب کرد . در اینجا مثالی را با هردو روش حل می‌کنیم (ازجدولهای لگاریتم چهار رقمی استفاده شده است) .

**مثال.** مطلوب است محاسبهٔ $\mathbf{x}=\frac{۰٫۱۶۲۱۴\sqrt[۳]{۳۲۴٫۳^{۲}}}{۰٫۶۴۸۶^{۲}\sqrt[۵]{۰٫۰۴۷۵}}$ .

**حل.** طریقهٔ اول تنظیم محاسبات :

در این طریقه ، ستون محاسبات اصلی از ستون محاسبات فرعی جداست و به طریقی است که درصفحهٔ روبرو آورده‌ایم :

### محاسبات اصلی

$$\lg x = \lg ۰{,}۱۶۲۱۴ + \frac{۲}{۳}\lg ۳۲۴{,}۳ - ۳\lg ۰{,}۶۴۸۶ - \frac{۱}{۵}\lg ۰{,}۰۴۷۵$$

$$\lg ۰{,}۱۶۲۱۴ = \overline{۱}{,}۲۰۹۷$$

$$\frac{۲}{۳}\lg ۳۲۴{,}۳ = ۱{,}۶۷۳۹$$

$$-۳\lg ۰{,}۶۴۸۶ = ۰{,}۵۶۴۰$$

$$-\frac{۱}{۵}\lg ۰{,}۰۴۷۵ = ۰{,}۲۶۴۶$$

$$\lg x = ۱{,}۷۱۲۲$$

$$\begin{array}{ll|l} ۷۱۱۸ & -۵۱۵ & \frac{۶}{۴} \\ ۴ & ۶۷ & ۰{,}۶۶۶ \\ \hline x = ۵۱{,}۵۶۷ & & \end{array}$$

### محاسبات فرعی

$$\begin{array}{ll|l} ۱۶۲ & -۲۰۹۵ & ۰{,}۱۴\times \\ ۱۴- & ۲ & ۱۷ \\ \hline \lg ۰{,}۱۶۲۱۴ = \overline{۱}{,}۲۰۹۷ & & ۲{,}۳۸ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} ۳۲۴ & -۵۱۰۵ & ۰{,}۳\times \\ ۳- & ۴ & ۱۴ \\ \hline \lg ۳۲۴{,}۳ = ۲{,}۵۱۰۹ & & ۴{,}۲ \end{array}$$

$$۲\lg ۳۲۴{,}۳ = ۵{,}۰۲۱۸$$

$$\frac{۲}{۳}\lg ۳۲۴{,}۳ = ۱{,}۶۷۳۹$$

$$\begin{array}{ll|l} ۶۴۸ & -۸۱۱۶ & ۰{,}۶\times \\ ۶- & ۴ & ۶ \\ \hline \lg ۰{,}۶۴۸۶ = \overline{۱}{,}۸۱۲۰ & & ۳{,}۶ \end{array}$$

$$۳\lg ۰{,}۶۴۸۶ = \overline{۱}{,}۴۳۶۰$$

$$-۳\lg ۰{,}۶۴۸۶ = ۰{,}۵۶۴۰$$

$$\lg ۰{,}۰۴۷۵ = \overline{۲}{,}۶۷۶۷$$

$$\frac{۱}{۵}\lg ۰{,}۰۴۷۵ = \overline{۱}{,}۷۳۵۴$$

$$-\frac{۱}{۵}\lg ۰{,}۰۴۷۵ = ۰{,}۲۶۴۶$$

طریقهٔ دوم تنظیم محاسبات :

$$\lg x = \lg ۰,۱۶۲۱۴ + \frac{۲}{۳}\lg ۳۲۴,۳ - ۳\lg ۰,۶۴۸۶ -$$

$$-\frac{۱}{۵}\lg ۰,۰۴۷۵;$$

۱) $\lg ۰,۱۶۲۱۴ = \overline{۱},۰۲۹۷$

۱۶۲ —۲۰۹۵

۱۴— ۲

$$\begin{array}{r} ۰,۱۴\times \\ ۱۷ \\ \hline ۲,۳۸ \end{array}$$

---

۲) $\lg ۳۲۴,۳ = ۲,۵۱۰۹$

۳۲۴ —۵۱۰۵

۳— ۴

$$\begin{array}{r} ۰,۳\times \\ ۱۴ \\ \hline ۴,۲ \end{array}$$

---

$۲\lg ۳۲۴,۳ = ۵,۰۲۱۸$

$\frac{۲}{۳}\lg ۳۲۴,۳ = ۱,۶۷۳۹$

۳) $\lg ۰,۶۴۸۶ = \overline{۱},۸۱۲۰$

۶۴۸ —۸۱۱۶

۶ ۴

$$\begin{array}{r} ۰,۶\times \\ ۶ \\ \hline ۳,۶ \end{array}$$

---

$۳\lg ۰,۶۴۸۶ = \overline{۱},۴۳۶۰$

$-۳\lg ۰,۶۴۸۶ = ۰,۵۶۴۰$

۴) $\lg ۰,۰۴۷۵ = \overline{۲},۶۷۶۷$

$-\frac{۱}{۵}\lg ۰,۰۴۷۵ = ۰,۲۶۴۶$

۵) $\lg ۰,۱۶۲۱۴ = \overline{۱},۲۰۹۷$

$$\frac{۲}{۳}\lg ۳۲۴,۳ = ۱,۶۷۳۹$$

$$-۳\lg ۰,۶۴۸۶ = ۰,۵۶۴۰$$

$$-\frac{۱}{۵}\lg ۰,۰۴۷۵ = ۰,۲۶۴۶$$

---

$$\lg x = ۱,۷۱۲۲$$

$$\begin{array}{cc|c|c} ۷۱۱۸ - ۵۱۵ & & ۴ & \frac{۶}{۰,۶۶۶} \\ ۴ - & ۶۷ & & \end{array}$$

$$x = ۵۱,۵۶۷$$

دربارهٔ روش آموزش حل معادلات نمائی و معادلات لگاریتمی بحثی نمی‌کنیم (و این بدان مناسبت است که در کتابهای درسی و جنب درسی بخوبی در این مورد بحث شده است) ؛ ولی در بـارهٔ معادلات لگاریتمی بعضی اشتباهات را کـه کم و بیش در همه جـا وجود دارد یـادآوری می‌کنیم . این اشتباهات بـراساس بی‌اطلاعی و عدم درك لگاریتم اعداد بوجود می‌آید . بعضیها علامت لگاریتم را جـدا از پرانتز جلو آن به حساب می‌آورند ، بعضی دیگر بطور مبهم رابطهٔ بین عدد ، لگاریتم آن و مبنای لگاریتم را پیش خود تصور می‌کنند و بالاخره عده‌ای شرایط وجود لگاریتم را درنظر نمی‌گیرند . دربسیاری

موارد هم مانع از این می‌شوند که روی لگاریتمهای بـا مبنای غیر از ۱۰ عمل شود.

به اعتقاد ما لزومی ندارد که وقت زیادی روی حل معادلات نمائی ومعادلات لگاریتمی صرف شود وبهتر است که معلم توجه بیشتر خود را به حل مسائلی از توابع نمائی و لگاریتمی معطوف دارد که در فیزیك وشیمی مورد استعمال دارند. مثلاً می‌توان براساس رابطهٔ $y = Na^x$ مسائل زیادی را که به نمودهای مهمی از طبیعت مربوطند، حل کرد: تجزیهٔ مواد رادیو آکتیو، قانون رشد کشت باکتریها و خمیر مایه‌ها، قوانین جذب، عکس‌العملهای یك مولکولی وغیره.

بها ۱۶۵ ریال